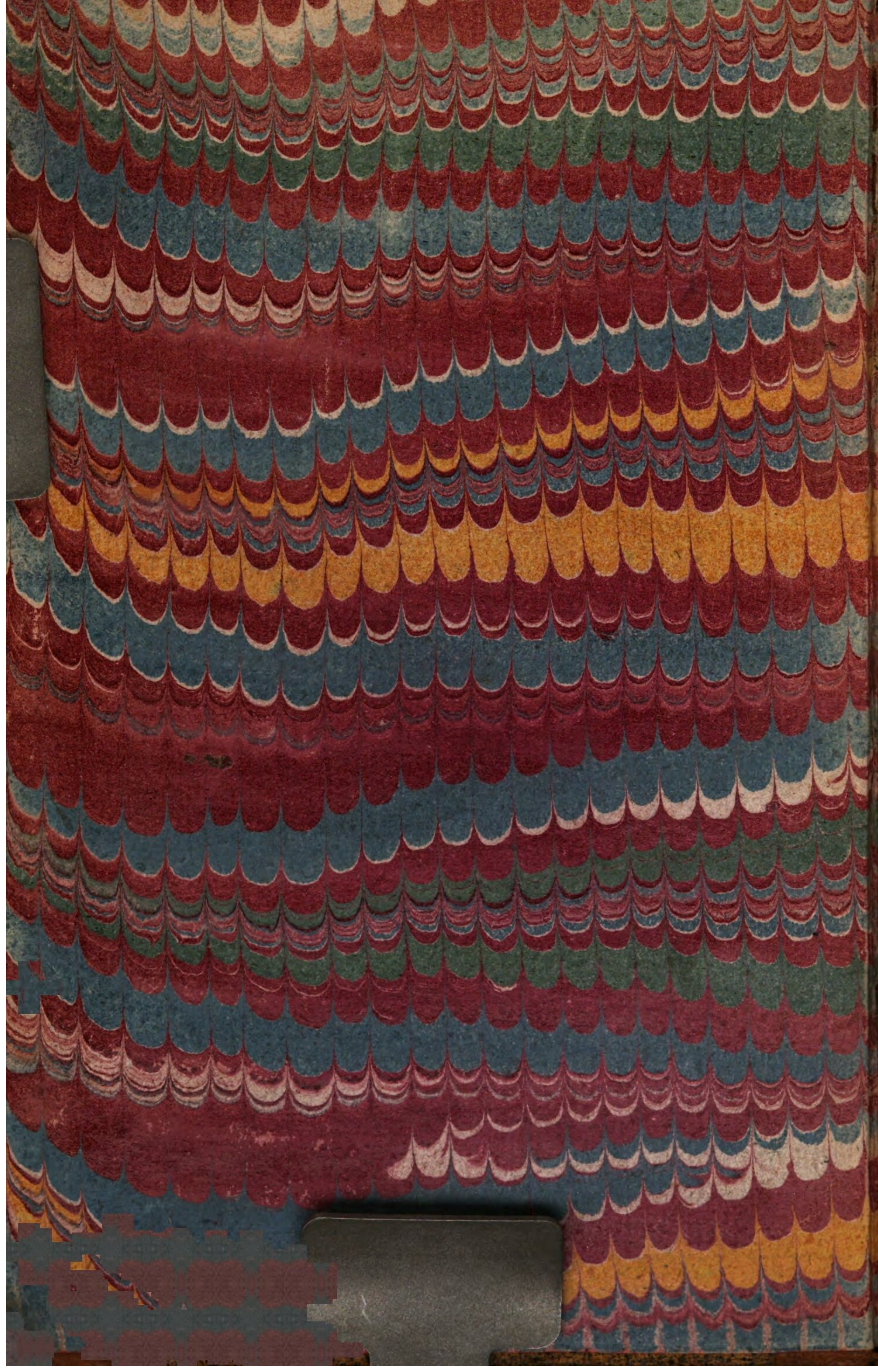
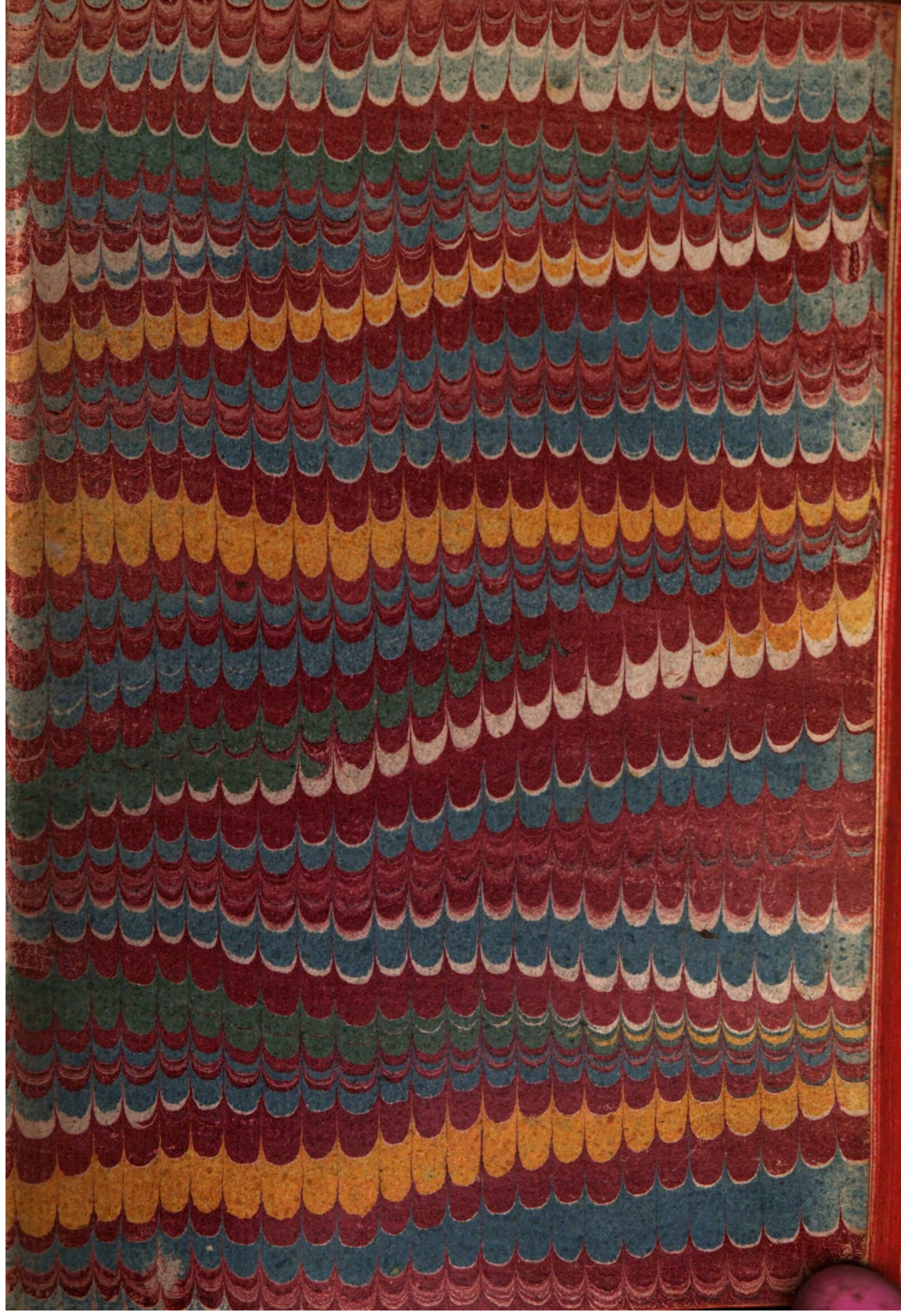




R





Math. P. 502

Sp. 5400!

Mathesis. Analysis finitorum et infini-
torum in serie 362.

R

DE MAXIMIS, ET MINIMIS
AD INSTITUTIONES GEOMETRICAS ACCOMMODATIS
S P E C I M E N

REGIAE CELSITUDINI
SERENISSIMI

PETRI=LEOPOLDI

ARCHIDUCIS AUSTRIAE,
HUNGARIAE AC BOEMIAE PRINCIPIS,

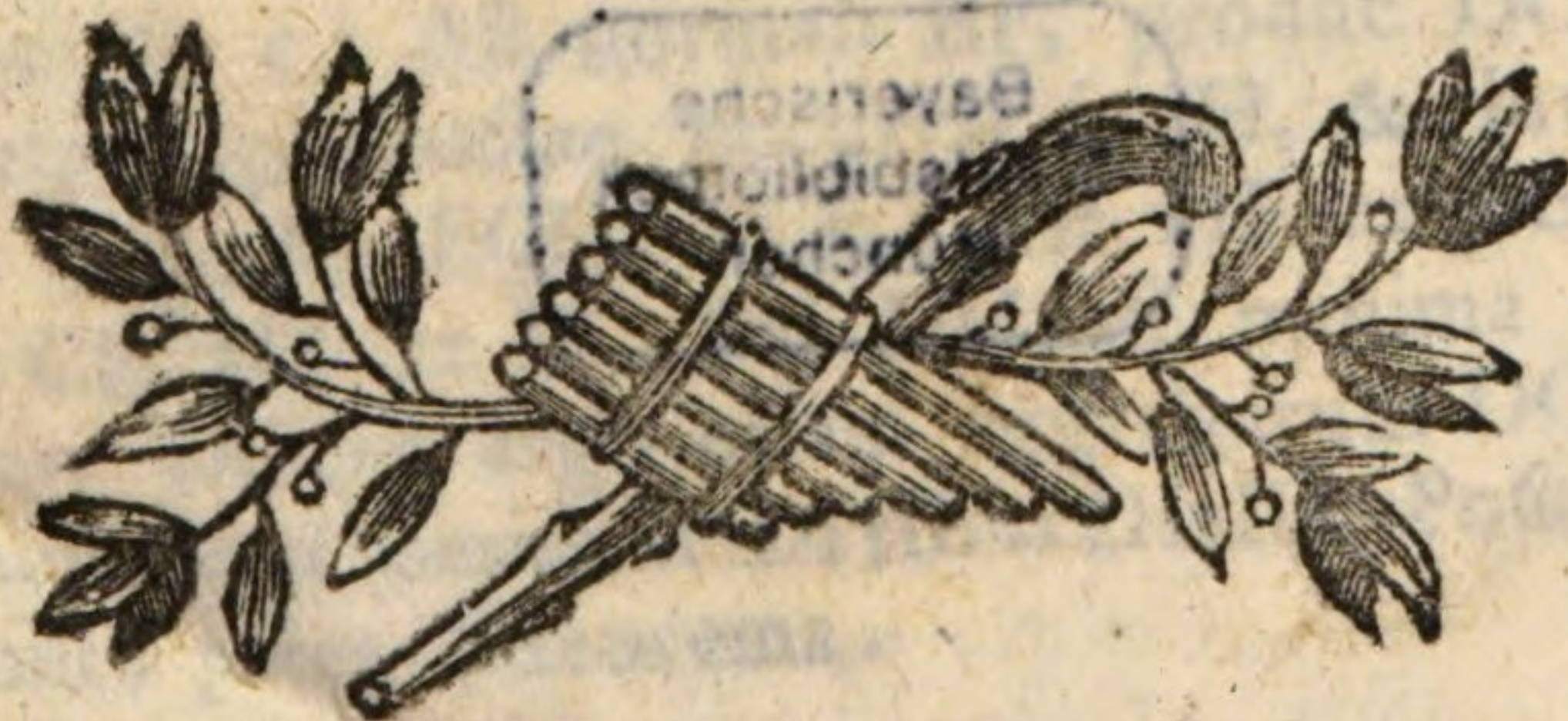
NEC NON

MAGNI ETRURIAE DUCIS
&c. &c. &c.

D I C A T U M

A U C T O R E

JACOBO=ANDREA TOMMASINI M. D.
ET IN ALMO PISANO LYCAEO
PUB. MATH. SUBLIMIOR, PROF.



PISIS ANNO MDCCLXXIV.

~~~~~  
EX TYPOGRAPHIA FRATRUM PIZZORNI ) Cum Facultate.



DE MAXIMIS ET MINIMIS

AD INSTITUTIONES GEOMETRICAS ACCOMMODATAE

S P E C I M E N

REGIAE CELESTIUDINI

S E R V A T I M

PETRI=LEOPOLDI

ARCHIDUCIS AUSTRIAE  
HUNGARIAE AC BOEMIAE PRINCIPIS

N E C N O N

MAGNI ETURURIAE DUCIS

Exc. &c. &c.

D I C T U M

A U G T O R E

JACOBO=ANDREA TOMMASINI M.D.

ET IN ALMO RISANOLYCAEO

PUB. MATH. SUBLIMIOR. PROF.

Bayerische  
Staatsbibliothek  
München

PISIS ANNO MDCCCLXIV.

~~~~~  
EX TYPOGRAPHIA FRATRUM PIZZORNI (Guss Fratr.)



DE MAXIMIS, ET MINIMIS

AD INSTITUTIONES GEOMETRICAS
ACCOMMODATIS

P A R S I.

L I B E R I.

De Triangulis, Quadrilateris, & Polygonis.

T H E O R E M A I.

1. **E**X omnibus triangulis DCE, DIE (Fig. 1.) in eadem basi DE constitutis, vertexque in recta AB positione data habentibus, triangulum DCE, angulos DCA, ECB cum recta AB aequales efficiens minima circumdatur perimetro.

Dem. Demissa ad AB normali EF, produc DC, donec ipsi EF pariter productae occurrat in H, & junge IH. Ob angulos aequales FCH, FCE, erit $HF = FE$, adeoque $CH = CE$, $IH = IE$. Sed DH est minima omnium aggregatorum $DI + IH$; ergo etiam aggregatum $DC + CE = DH$, erit minimum omnium $DI + IE = DI + IH$. Posita igitur DE communi, patet Theorema.

C O R O L L A R I U M.

2. Datis extra rectam AB ex eadem parte duobus punctis D, E, si ad ipsam agantur duae rectae DC, CE, quae
A in C

in C coëuntes, angulos DCA, ECB aequales efficiant; aggregatum $DC+CE$ erit *minimum* omnium aggregatorum $DI+IE$, quae duabus alijs quibuscumque rectis DI, IE, ex iisdem punctis in eandem rectam ad angulum DIE incidentibus haberi possunt.

T H E O R E M A II.

3. Inter omnia triangula BAC, DAE (Fig. 2.), quae angulos verticales BAC, DAE aequales, & altitudinem AI, ex angulis verticalibus in basim subjectam demissam, habent communem, triangulum isosceles ABC minima basi, minimo crurum angulum verticalem efficientium aggregato, adeoque minima perimetro, & area minima afficitur.

Dem. Quoniam cruribus aequalibus AB, AC interjacens latus AD $\angle$ AE, facta AF = AE, junge BF. Triangula ABF, ACE, ob angulos BAF, CAE aequales, erunt aequalia, & similia, adeoque BF = CE; Sed ang. AEC $\angle$ ACD, seu DFB $\angle$ ABD, & ABD $\angle$ ADC = BDF; ergo potiori jure DFB $\angle$ BDF, quare BD $\angle$ BF = CE; positaque communi DC, fiet BC $\angle$ DE; quod erat primum.

In AF = AE sumpta AH = AB, junge BH. Ang. AHB = HFB+FBH; sed ang. AHB = ABH = ABD+DBH; ergo ABD+DBH = HFB+FBH. Jam verò ACB $\angle$ AEC, seu ABD $\angle$ HFB; ergo ang. DBH $\angle$ FBH, adeoque DH $\angle$ HF. Secta igitur AM = AC, quum sit ME = FH, erit ME $\angle$ DH. Ab ME aufer MN = DH, erit AB+AC = AD+AN; ergo AB+AC $\angle$ AD+AE; quod erat secundum & tertium. Quartum patet.

C O R O L L A R I U M I.

4. Quò propius cruri AB est latus AD, triangulum DAE minorem habet basim, minorem summam laterum angulum verticalem efficientium, minorem perimetrum, ac minorem aream prae reliquis, excepto isoscele BAC, ut liquet.

COROL.

COROLLARIUM II.

5. Si quilibet angulus FAG, fixo vertice A, ita in latus utrumque agitetur, ut crura AF, AG a subiecta PQ utrinque indefinite protracta portiones, veluti BC, DE, abscindant; hujusmodi portionum *minima* tunc erit, cum latera AD, AE, vel cum anguli ADE, AED fient aequales. Caeterae verò portiones recisae alijs *minores* erunt, cum crura AD, AE, vel cum anguli ADE, AED aequalitati magis appropinquabunt.

COROLLARIUM III.

6. Inter omnes rectas BC, DE (*Fig. 3.*), quae anguli acuti MAN cruribus AM, AN in infinitum protensis utrinque terminatae, rectas AB, AC, AD, AE sub aequalibus altitudinibus AI, AH secant; illa BC, quae triangulum isosceles ABC claudit, est *minima*, aggregatum $AB+AC$ crurum dicti anguli MAN *minimum* rescindit, & triangulum BAC *minimae* areae, *minimaeque* perimetri efficit; adeoque haberi facile potest recta illa, quae dempta BC, hujusmodi functiones *minimas* prae ceteris peragat. Et hic animadvertendum, quod si centro A, radio AI describatur circulus FIK, rectarum BC, DE intersectio in rectae BC dimidio, pariterque rectae DE punctum D ultra punctum F, ubi circulus crus alterum AM secat, nunquam cadere poterit; quare portio BF erit (ex parte cruris alterius AM) locus omnium rectarum ultra minimam BC terminatarum. Si vero angulus MAN non fuerit acutus, sed rectus, vel obtusus, tunc locus punctorum D foret semper minor quam BF; nam recta ex puncto F discedens secare nequiret crus AN, sed eidem esset parallela in primo casu, divergens in secundo, ut in *fig. 4.* videre est.

THEOREMA III.

7. Inter omnia triangula, in quibus bases & altitudines sunt aequales, isosceles maximum habet angulum verticalem, & minimam perimetrum.

A 2

Dem.

Dem. Stantibus iisdem quae in Theor. antec. (3.), posita $DL = BC$ (Fig. 2.), junctaque AL , erit triang. $DAL = BAC$, ang. autem $DAL < BAC$, & ita semper ubicumque tam punctum D , quam punctum L in recta PQ reperiuntur; sed triangulum isosceles BAC in hoc quoque casu *minima* cingitur perimetro (1.); ergo &c.

C O R O L L A R I U M I.

8. Inter omnia triangula, in quibus bases, & altitudines sunt aequales, illud, quod ad isoscelismum magis vergit, *maximum* habet prae reliquis dempto isoscele angulum verticalem, *minimamque* perimetrum. Id per Fig. 1. constructionem facillime demonstratur, si ibi AB, DE ponantur parallelae.

Quin etiam quoniam sumpta $CL = CI$ (Fig. 1.), junctisque LD, LE , ostendi nullo negotio potest, esse LE (ex parte convergentiae DE cum AB) minimam rectarum ID, IE , & contra LD maximam; in triangulis aequalibus HID, HLD basi communi HD insistentibus latera HI, ID minus ab isoscelismo distabunt quam latera HL, LD , adeoque $HI + ID < HL + LD$, seu $EL + ID < EL + LD$; quapropter ex omnibus triangulis in eadem basi DE constitutis, illud DEI , excepto DCE jam invento (1.), *minimam* prae ceteris habebit perimetrum, quod (ex parte divergentiae baseos communis DE ab AB) vertice I ad punctum C vel aequaliter, vel propius accedet. Ubi apparet, quod si ducta recta quavis terminata HD secante AB positione datam in C , sumptisque hinc inde a puncto C duobus punctis aequidistantibus I, L , jungantur HI, ID, HL, LD , possumus (cognita ratione majoris, vel minoris inaequalitatis, quam habet HC ad CD) determinare, quatenus summa ex duabus $HI + ID, HL + LD$, vel quisnam ex duobus angulis HID, HLD sit *minor*.

C O R O L L A R I U M II.

9. Inter universa triangula aequalia *minimam* aequilaterum habet perimetrum. Si negas; sit aliud triangulum
BDC

BDC (Fig. 5.) hujusmodi proprietate praeditum, cujus duo saltem latera BD, DC sint inaequalia. In eadem basi BC constituatur triangulum isosceles ABC aequale eidem triangulo BDC; habebit ABC perimetrum minorem quam BDC, quare BDC non est illud, quod minimam habet perimetrum; & hoc semper, donec ad triangulum aequilaterum deveniatur.

T H E O R E M A IV.

10. Inter omnia triangula ABC, DBC (Fig. 5.). quae bases, ac perimetros aequales habent, isosceles ABC maxima area, maximo angulo verticali, & maxima gaudet altitudine.

Dem. Quoniam perimetri sunt aequales, vertex D est infra parallelam basi BC (7.); ergo junctae AD parallela BE cadet infra basim BC. Protrahe DC usque ad BE, & junge AE, quae cruribus AB, AC interjacebit. Erit ang. $BAE > BDE$ num. cit. adeoque potiori jure $BAC > BDC$; cetera patent.

C O R O L L A R I U M I.

11. Inter omnia triangula, quae bases, ac perimetros aequales habent, illud, quod ad isoscelismum magis appropinquat, maxima area, maximo angulo verticali, & maxima prae ceteris, excepto isoscele, fruitur altitudine. Id facile dignoscitur revocato Coroll. 1. Theor. antec. (8.), & eodem hujus Theor. adhibito ratiocinio.

C O R O L L A R I U M II.

12. Inter universa triangula isoperimetra aequilaterum, est maximum. Demonstratur simili fere modo, quo Theorema inversum (9.), quamobrem inter omnia triangula isoperimetra, isosceles illud post aequilaterum erit majus, quod ad aequilaterum propius accedet.

L E M M A.

13. Triangula duos angulos invicem aequales habentia
A 3 sunt

sunt ut rectangula, ex lateribus angulos aequales efficientibus.

Dem. Triangulis ABC, ADE (Fig. 6. 7.) circa communem angulum A constitutis, jungo CD. Erit triang. $ABC:ADC = AB:AD$, pariterque triang. $ADC:ADE = AC:AE$; quare multiplicando, fiet triang. $ABC:ADE = AB.AC:AD.AE$. Q. E. D.

T H E O R E M A V.

14. *Inter omnia triangula ABC, FBC (Fig. 5.), quae angulos verticales, & bases aequales habent, isosceles ABC maxima perimetro, maxima area, maximo rectangulo BAC, & maxima praeditum est altitudine ab angulo verticali in latus subjectum demissa.*

Dem. Si triangula ABC, DBC aequalibus constarent sub aequali base perimetris, trianguli isoscelis ABC angulus BAC foret major angulo BDC (10.); ergo ut angulus BFC angulum BAC adaequet, esse debet infra angulum BDC; quo posito, cetera patent.

C O R O L L A R I U M I.

15. Ergo inter omnia triangula scalena, in quibus anguli verticales, & bases sunt aequales, illud, quod ad isosceles propius accedit, per idem ratiocinium Coroll. I. Theor. antec. (11.) superstructum, *majori* prae ceteris perimetro, area *majori*, *majori* crurum rectangulo, & *majori* gaudebit altitudine ab angulo verticali in latus subjectum demissa.

C O R O L L A R I U M II.

16. Quum inter omnia triangula rectangula in basibus aequalibus constituta, isosceles maximum habeat crurum angulum rectum componentium aggregatum, apertum est, ex omnibus quadratis, quae bina assumpta, ararum summas aequales habent, quadrata duo invicem aequalia *maximo* perimetrorum aggregato ditari; adeoque bina illa quadrata, quorum latera sunt ad aequalitatem

ratem propinquiora, cetera *majori* perimetrorum aggregato antecellere, ut ope semicirculi res sit manifesta.

M O N I T U M

17. Quod de quadratis demonstravimus, locum etiam, obtinet in figuris quibuscumque planis ejusdem generis quae sint similes, quae binae sint assumptae, quaeque dictorum triangulorum crura circa angulum rectum pro lateribus homologis agnoscant; quod pro ceteris casibus, in quibus quadratorum quoad maxima & minima affectiones determinantur, semel indicasse brevitatis gratia sufficiat; figurarum enim planarum similium perimetri sunt in simplici, areae in duplicata laterum homologorum ratione. Figuras autem planas *eiusdem generis* illas appello, quae eodem cum laterum, tum angulorum numero constant.

T H E O R E M A VI.

18. *Inter omnia triangula, in quibus anguli verticales, & areae sunt aequales, isosceles minimam habet basim, maximam altitudinem ab angulo verticali in latus subjectum demissam, & minimam perimetrum.*

Dem. Sit ABC (*Fig. 8.*) triangulum isosceles, cujus altitudo AI, basis BC, & EDC scalenum, cujus altitudo DH, basis EC; eorum anguli aequales BAC, EDC, & situs ut in figura. Ob areas (*ex hyp.*) aequales, stabit $AI : DH = EC : BC$; sed propter angulum EBC ex figurae constructione obrusum, punctum E cadit infra punctum B, adeoque $EC > BC$; ergo $AI > DH$; quod erat primum, & secundum.

Triangulum isosceles ABC (*Fig. 9.*), & scalenum ADE ipsi aequale ita connectantur, ut anguli aequales in A coincident; & bases BC, DE se in aliquo puncto intersectent. Punctum istud intersectionis (accepto puncto D quod est infra B) esse nequit in dimidio F baseos BC, nec ultra; ducta siquidem DH per F, si ex B agatur BK parallela cruri AC, erit triang. HFC = BFK, proptereaque tri-

ang. $HFC < BFD$, quod hypothefi adverfatur. Punctum igitur intersectionis erit in L citra punctum F . Sed tunc deniffis ex L ad crura AB, AC normalibus, conflat, normalem ductam ad crus AC effe altera majorem; ergo $EC < BD$, adeoque pofitis $AB \dagger AE$ communibus, ob $BC < DE$, erit trianguli ABC perimeter minor perimetro trianguli ADE ; quod erat tertium.

COROLLARIUM I.

19. Inter omnia triangula scalena, in quibus anguli verticales, & areae funt aequales; illud quod ifofceli magis appropinquat, *minorem* prae ceteris habet perimetrum, *minorem* bafim, & *majorem* altitudinem ab angulo verticali in latus fubjectum demiffam; Si enim AC (*Fig. 8.*) minor fit quam AB , & DC minor quam AC , erit femper $BC < EC$; cetera fimilem allato requirunt ratioecinium.

COROLLARIUM II.

20. Ex omnibus triangulis reftangulis aequalibus, ifofceles *minimam* habet perimetrum, *minimam* bafim, & *maximam* altitudinem ex angulo recto in bafim demiffam.

COROLLARIUM III.

21. Ex omnibus reftis BC, DE (*Fig. 9.*) quae dati anguli A cruribus AM, AN indefinite protenfis utrinque terminatae triangula aequalia ABC, ADE abfcindunt illa BC , quae triangulum ifofceles ABC claudit, eft *minima*; ceteris vero *minor* in pari cafu eft illa, quae duo crura AB, AC ad ifofcelifimum propinquiora conjungit. Quapropter

COROLLARIUM IV.

22. Si per dimidium F reftae BC anguli MAN cruribus AM, AN utrinque terminatae, & crurum portiones AB, AC aequales abfcindentis quotlibet reftae DH tranfeant cruribus ijsdem & ipfae coercitae, triangulum ABC a BC reftum erit triangulorum ADH *minimum*,
mini-

minimum exhibebit rectangulum BAC (13.), & normalium ab angulo A supra bases BC, DH demissarum illa, quae decidet supra BC, erit *maxima*, ut centro A, intervallo AF descripto circulo patet; hinc BC erit omnium DH *minima*, *minima* crurum resectorum summa AB + AC, adeoque trianguli ABC perimeter *minima*; quum enim sit ang. DBF > FHC, ducta BK cruri AN parallela, fiet BK = HC; sed ob triangula similia ADH, BDK, habemus BK < BD; ergo HC < BD, ac proinde AB + AC < AD + AH. Quin etiam

COROLLARIUM V.

23. Si recta BC secans duas rectas quascumque OM, EN convergentes, vel divergentes, faciat utrinque cum illis angulos aequales OBC, ECB, erit omnium DH ipsam bifariam in F secantium, & rectis iisdem OM, EN hinc inde terminatarum, *minima*. Ex quo statim colligitur, inter omnes rectas, quae per angulum F (Fig. 10. 11.) quadrati, aut rhombi AHFC transeunt, illa GB, quae cum lateribus AH, AC productis angulos AGB, ABG aequales facit, esse *minimam*; haec enim in puncto F bifariam secatur. Similiter si angulorum H, C (Fig. 12. 13.) quadrati, aut rhombi AHFC vertices duae rectae KL, MN ita traiciant, ut anguli LHF, NCF sint aequales, recta GB, quae ab angulo F bifariam secatur, erit *minima*, quippe quae angulos KGB, MBG cum rectis KL, MN aequales gignit. Idem accidit, si figura BHFC sit polygonum regulare, aut irregulare, dummodo ejus latera BH, DC protracta angulos LHF, NCF cum lateribus aequalibus HF, FC aequales efficiant

THEOREMA VII.

24. Inter omnia triangula ABC, CDE, (Fig. 8.), in quibus anguli verticales, & perimetri sunt aequales, isosceles ABC maximam habet aream, maximum crurum AB, AC rectangulum, minimam basim, & maximam altitudinem ab angulo verticali in basim subjectam demissam.

Dem. Stantibus quae in Theor. VI. (18.), si perimetri fiant aequales, trianguli isoscelis area evadet *maxima*; quod est primum, & secundum (13.). Si

Si triangula, ABC, DBC eandem basim BC, & æquales angulos verticales A, D habentia considerentur, isosceles ABC maxima cingeretur perimetro (14); ut igitur perimetri fiant æquales, oportet, ut triangulum DBC crescat, evadatque ex. gr. DEC, quo isosceli ABC aptato, ut in figura, evidens est, ob angulum obtusum EBC, basim BC trianguli BAC fore semper *minorem* basi EC trianguli isoperimetri DEC; *quod erat tertium*.

Si in triangulis ABC, FEC anguli verticales, & altitudines forent æquales, trianguli isoscelis ABC perimeter foret minima (3).; ergo ut perimetri reddantur æquales, necesse est, ut triangulum scalenum EFC, salvo angulo verticali, deprimatur, fiatque ex. gr. BDC, adeoque ejus altitudo *minor* evadet *quod erat quartum*.

COROLLARIUM I.

25. Inter omnia triangula scalena, in quibus anguli verticales, & perimetri sunt æquales; illud, cujus latera ad isoscelismum magis accedunt, *majorem* prae ceteris habet aream, *majus* crurum rectangulum, *minorem* basim, & *majorem* altitudinem ab angulo verticali in latus subiectum demissam. Hoc infertur per idem ratiocinium numeris 19. 15. 4. accommodatum.

COROLLARIUM II.

26. Inter omnia triangula rectangula isoperimetra, isosceles *maximam* habet aream, *minimam* basim, & *maximam* altitudinem ex angulo recto in hypotenusam demissam.

COROLLARIUM III.

27. Idcirco inter omnia triangula rectangula cum æqualia (20), tum isoperimetra, isosceles aggregato ex laterum quadratis *minimo* afficitur. Et vicissim inter omnia triangula rectangula, in quibus aggregata quadratorum ex lateribus æquantur, isosceles *maximam* habet aream, tum perimetrum.

COROLLARIUM IV.

28. Ex omnibus rectis BC, DE (*Fig. 9.*), quae dati anguli A cruribus AM, AN indefinite excurrentibus utrinque terminatae triangula ABC, ADE isoperimetra separant, illa BC, quae triangulum isosceles ABC claudit, est *minima*; reliquis autem *minor* in pari casu est illa, quae duo crura ad isoscelismum propinquiora connectit. Neque hinc etiam est praetereundum, punctum L, ubi DE infra punctum B exiens, & BC se intersecant, neque in dimidio F ipsius BC, neque ultra, sed citra tantum cadere posse. Etenim quoniam $DE > BC$, ut triangulorum ABC, ADE perimetri sint aequales esse debet $BD < EC$; ducta igitur ad DE recta BI parallela cruri AC, quia $AE < AD$, erit $BI < BD$, adeoque $BL < LC$.

T H E O R E M A VIII.

29. *Inter omnia triangula, in quibus anguli verticales, & crurum ipsos efficientium aggregata aequantur, isosceles, minimam habet basim, minimam perimetrum, maximam aream, maximum ex ipsis cruribus rectangulum, & maximam altitudinem ex angulo verticali in basim demissam.*

Dem. Cum in triangulis ABC, DBC (*Fig. 5.*) anguli BAC, BDC sunt aequales, & basis BC communis, triangulum isosceles ABC maxima praeditum est perimetro (14.); quare $BA + AC > BD + DC$; ut igitur ista laterum aggregata fiant aequalia, opus est, ut crus alterum trianguli DBC crescat. Crescat igitur DC usque in E, ut sit $BA + AC = BD + DE$; liquet, fore basim BC *minorem* basi BE, adeoque triangulum ABC perimetrum habere *minorem* perimetro trianguli DBE, & ita semper; *quod erat primum, & secundum.*

Si anguli aequales BAC, BDE in unum coeant, ut in *Fig. 9.* & ponamus triangula ABC, DAE esse aequalia; erit $EC < DB$, per ea, quae nuper (18.) demonstravimus ut
igitur

igitur triangula ABC, ADE evadant quoad duo latera circa angulum communem A isoperimetra, augere oportet CE, adeoque triangulum ADE contrahere; *quod erat tertium, & quartum* (13.); *quintum* patet.

COROLLARIUM I.

30. Inter omnia triangula, in quibus anguli verticales, & crurum circa ipsos aggregata aequantur, illud, excepto isoscele, *minorem* habet basim, *minorem* perimetrum, *majorem* aream, *majus* ex ipsis cruribus rectangulum, & *majorem* altitudinem ab angulo verticali in basim subjectam demissam, quod ad isoscelismum (ratione habita ad dicta duo crura) magis appropinquat. Patet per hujus Theor. ratiocinium ad num. 15. aptatum, & ex BC (Fig. 9.), quae separet latera AB, AC ab aequalitate minus distantia quam AD, AE.

COROLLARIUM II.

31. Ex omnibus rectis BC, DE (Fig. 9.), quae dati anguli A cruribus AM, AN indefinite productis utrinque terminatae resecant triangula ABC, ADE summas AB + AC, AD + AE aequales habentia; illa BC, quae triangulum, isosceles ABC claudit, est *minima*, & idem triangulum ABC *minimae* perimetri, *maximae* areae, *maximi* ex dictis cruribus rectanguli, & *maximae* altitudinis ex angulo verticali in basim demissae format. Haec autem omnia recta illa, excepta BC, prae ceteris efficit, quae triangulum ad isoscelismum in dictis cruribus magis appropinquans secernit.

COROLLARIUM III.

32. Si recta quaevis AB (Fig. 10. 11.) bifariam in C. et non bifariam in D secetur; omnium rectangulorum CH, DI (Fig. 10.) ex segmentis prodeuntium quadratum CH erit *maximum*; & omnium rhomboidum aequiangularum CH, DI (Fig. 11.) rhombus CH erit *maximus*. Seu, quod eodem recidit, omnium rectangulorum

lorum isoperimetricorum quadratum est *maximum*, ac *minimam* habet diagonalem. Similiter omnium rhomboidum isoperimetricarum, & aequiangularum rhombus est *maximus*, ac *minimam* habet diagonalem AF prae diagonalibus AE per angulos aequales traductis. Hujusmodi autem magnitudines *maximae*, aut *minimae secundariae* facile haberi possunt. Descripto enim circa diametrum AB (Fig. 10.) semicirculo ALB, erectisque ad peripheriam normalibus CL, PM, DN, perspicuum est,

rectang. APB $\triangleright$ ADB, quia $\overline{PM}^2 \triangleright \overline{DN}^2$, adeoque rectangulum illud, cujus latera ad aequalitatem magis accedunt, esse ceteris isoperimetricis, quadrato non computato *majus*; & sic de rhomboidibus isoperimetricis, & aequiangularis, quae rectangulis isoperimetricis sint proportionales, statuendum.

COROLLARIUM IV.

33. Quoniam $\overline{AC}^2 + \overline{CF}^2 = \overline{AF}^2$ (Fig. 10.) & $\overline{AD}^2 + \overline{DE}^2 = \overline{AE}^2$, erit $\overline{AC}^2 + \overline{CF}^2 < \overline{AD}^2 + \overline{DE}^2$; seu $\overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 < \overline{AD}^2 + \overline{DB}^2$; nimirum quadratorum ex duobus ejusdem rectae segmentis genitorum *minima* sunt illa, quae a segmentis aequalibus efficiuntur; quoad cetera verò, *minora* semper erunt illa duo, quorum latera ad aequalitatem magis accedent; fane recta normali AF propinquior *minor* est longinquiori quavis AE.

COROLLARIUM V.

34. Propterea 1: Ex omnibus triangulis isoperimetricis ABC, DBC (Fig. 8.) in eadem basi BC constitutis, isosceles ABC habet aggregatum $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$ *minimum* prae aggregato quovis alio $\overline{DB}^2 + \overline{DC}^2$ quod multo magis fit verum,

rum, si triangula sint aequalia (7.) 2: Si recta BC (Fig. 9.) anguli dati MAN crura trajiciens abscindat por-
tiones aequales AB, AC, & alia recta DH ejusdem an-
guli cruribus intercepta ipsam BC bifariam secet in F;
quadrata laterum omnium in triangulo isoscele, nimirum
 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$ formabunt comparate ad quadrata $\overline{AD}^2 + \overline{AH}^2$

+ $\overline{DH}^2$ *minimum* aggregatum (22.) 3: Quadrata laterum
in rhombo *minima* semper erunt prae laterum quadra-
tis in rhomboide qualibet isoperimetra, hoc est 4

$\overline{AC}^2 < 2 \overline{AD}^2 + 2 \overline{DE}^2$ (Fig. 11.); idem de quadrato com-
parate ad omnia rectangula isoperimetra. 4: Tandem,
ijsdem retentis figuris, $4 \overline{AC}^2 < 4 \overline{AD} \cdot \overline{DE}$ (13).

THEOREMA IX.

35. Inter omnia triangula, in quibus anguli verti-
cales, & areae sunt aequales, triangulum isosceles,
habet crurum aequales angulos componentium aggregatum
minimum. Id ex demonstratione Theor. VI. (18) fit
manifestum.

COROLLARIUM I.

36. Inter omnia triangula, in quibus anguli vertica-
les, & areae sunt aequales, triangulum ad isoscelismum
propinquius habet crurum circa aequales angulos aggre-
gatum reliquis crurum aggregatis, excepto isoscele, sin-
gillatim *minus* (19).

COROLLARIUM II.

37. Inter omnia rectangula aequalia, quadratum *mi-
nimam* habet perimetrum, ac *minimam* diagonalem; pa-
riterque inter omnes rhomboides aequales, & aequian-
gulas, rhombus ipsis aequiangulus, & singillatim aequalis
mini-

minimam habet perimetrum, & *minimam* diagonalem prae illis omnibus, quae per angulos aequales traducuntur. Demptis vero quadrato in primo casu, & rhombo in secundo, rectangula, & rhomboides, in quibus latera sunt aequalitati propinquiora, *minorem* prae ceteris perimetrum, ac *minorem* diagonalem comparate ad reliquas per angulos aequales transeuntes retinent.

COROLLARIUM III.

38. Quadrata laterum in rhombo *minimum* aggregatum potiori jure semper efficient comparate ad aggregatum quadratorum ex lateribus in rhomboide qualibet ipsi aequali, videlicet $4\overline{AC}^2 < 2\overline{AD}^2 + 2\overline{DE}^2$ (Fig. 11.); quod etiam in quadrato prae omnibus rectangulis aequalibus obtinet (33).

THEOREMA X.

39. *Universorum triangulorum quoad duorum laterum summam isoperimetrorum, isosceles, in quo duo ista latera invicem aequalia angulum rectum efficiunt, est maximum.*

Dem. In triangulis ABC, ADC, AEC (Fig. 14.) sint aequalia omnia latera CA, CD, CB, CE, ponaturque latus AC commune, ut in figura, & angulus ACB rectus. Demissis ex punctis D, E ad basim AC normalibus DH, EL, ductaque per punctum B rectae AC parallela MN, perspicuum est, fore productum AC.HD pariterque AC.LE minus unumquodque producto AC.CB, ec. adeoque triangulum rectangulum ACB *maximum*. Sed unumquodque triangulum isosceles est maximum prae omnibus triangulis, quae circa aequalem angulum habent laterum inaequalium aggregatum aequale aggregato crurum aequalium ejusdem trianguli isoscelis (29.); ergo &c.

COROLLARIUM I.

40. Ex omnibus triangulis quoad duo latera inter se inaequalia isoperimetris, illud, cujus crura angulum re-

Atum formantia ad aequalitatem magis accedunt, erit, excepto isoscele rectangulo, reliquis *majus*. Si enim latus commune AC non sit aequale singulis lateribus invicem aequalibus CD, CB, CE, semper persistit triangulum rectangulum ACB *maximum*, quicumque sint anguli non recti ADC, AEC, quia altitudo BC semper est major singulis altitudinibus DH, EL. Inter triangula vero rectangula, illud, cujus latera circa angulum rectum ab aequalitate minus discrepant, est, isoscele non computato, ceteris *majus* (30.).

C O R O L L A R I U M II.

41. Omnium rhomboidum isoperimetrarum rectangulum isoperimetrum est *maximum*.

C O R O L L A R I U M III.

42. Ex universis parallelogrammis isoperimetris quadratum est *maximum*, & aggregatum ex laterum quadratis rhombo excepto, habet *minimum* (33.).

C O R O L L A R I U M IV.

43. Ex omnibus triangulis, altitudinum, ac basium aggregata aequalia habentibus, illud, in quo altitudo basium adaequat, est *maximum*. Etenim si in triangulis isoscelijs ABE, FGK (Fig. 15. 16.) quorum altitudines AC, FH, fuerit $AC + BE = FH + GK$; & $AC = BE$; Sumptis altitudinum dimidijs CD, HI, erit quoque $BC + CD = GH + HI$; sed $BC = CD$; ergo junctis BD, GI, triang. BCD $>$ GHI, adeoque triang. ABE $>$ FGK. Idem valet de triangulis scalenis aBE, fGK sub aequalibus basibus BE, GK, aequalibusque altitudinibus ac, fh.

T H E O R E M A XI.

44. Inter omnia aggregata, quae haberi possunt, duae quaelibet triangulorum omnium aequalium latera accipiendo; illud, quod fit a duobus cruribus aequalibus trianguli rectanguli isoscelis, est *minimum*.

Dem.

Dem. Sint duo triangula aequalia ABC, DEF (*Fig.* 17. 18.), ac triangulum ABC sit isosceles, & rectangulum in A; dico esse $AB + AC < DE + EF$, seu $AB + AC < DE + DF$, seu $AB + AC < DF + FE$. Etenim finge triangulum isosceles HGI (*Fig.* 19.) in G rectangulum esse triangulo DEF quoad latera GH + GI, DE + EF isoperimetrum; illud erit hoc majus (39). Ut igitur triangulum GHI fiat aequale, & simile triangulo ABC, adeoque triangulo DEF aequale evadat, etiam ejus crura aequalia GH, GI imminuantur, oportet; ergo $AB + AC < DE + EF$. Eodem ordine ratiocinando, ostendetur, $AB + AC < DE + DF$, & $AB + AC < DF + FE$. Q. E. D.

COROLLARIUM I.

45. Ex omnibus aggregatis, quae dari possunt, duo quaelibet triangulorum omnium aequalium, excluso triangulo isoscele, latera accipiendo; illud, quod fit a duobus cruribus, quae trianguli rectanguli angulum rectum constituunt, & ad aequalitatem magis accedunt, est reliquis *minus*. Sit enim ABC hujusmodi triangulum rectangulum aequale alio scaleno DEF; concipe triangulo ABC aliud triangulum rectangulum GHI simile, habens crurum circa angulum rectum G aggregatum $GH + GI = DE + DF$; erit GHI majus triangulo DEF (40.); prosequere Theorematis demonstrati ratiocinium, & Corollarium constabit.

COROLLARIUM II.

46. Ex omnibus rhomboidibus aequalibus rectangulum ipsis aequale *minimam* habet perimetrum.

COROLLARIUM III.

47. Ex universis parallelogrammis aequalibus quadratum *minimam* habet perimetrum adeoque potiori jure *minimum* ex laterum quadratis aggregatum (33).

COROLLARIUM IV.

48. Ex omnibus triangulis aequalibus, illud, cujus altitudo basin adaequat, *minimum* habet ejusdem altitudinis,

dinis, ejusdemque baseos aggregatum. Nam si in triangulis isoscelijs aequalibus ABE, FGK (Fig. 15. 16), quorum altitudines AC, FH, triangulum ABE habeat $AC = BE$, sumptis altitudinum dimidijs CD, HI, junctisque BD, GI, triangulum rectangulum isosceles BCD aequale triangulo rectangulo GHI praebebit $BC + CD < GH + HI$, adeoque etiam $AC + BE < FH + GK$; quod etiam de triangulis scalenis aBE, fGK sub eadem conditione fit manifestum.

T H E O R E M A XII.

49. Ex omnibus triangulis, quae in eadem basi CD (Fig. 20.) constituta, vertices habent in recta positione data AM, cum ipsa CD ex parte puncti D convergente; triangulum CFD, cujus verticem F media proportionalis FE inter CE, CD (ex parte anguli CEF minoris suo complemento CEM) determinat, maximo afficitur angulo verticali CFD.

Dem. Quum enim fit $\overline{FE}^2 = CE \cdot ED$, erit FE tangens circuli per puncta C, D, F transeuntis, ut in figura; sed quilibet angulus CHD eidem arcui COD insistens, & circumferentia terminatus, qui angulum CFD adaequat, major est angulo respondente CID, cujus vertex I sit in portione, AE; ergo angulus CFD $>$ CID. Praeterea si in EM sumatur EL = EF, angulus CLD erit pariter maximus omnium angulorum CMD intra convergentes AM, CD existentium, & verticibus rectam EM attingentium. Sed facile colligitur, angulum CFD majorem esse angulo CLD; portio enim CPD circuli majoris LDC, quae sustinet angulum DLC, minor est portione COD circuli minoris FDC, quae sustinet angulum CFD. Ergo angulorum omnium, de quibus est quaestio, angulus CFD est maximus. Q. E. D.

C O R O L L A R I U M I.

50. Si CD producta evadat rectae AM normalis, anguli CFD, CLD fient aequales, adeoque erit uterque ceterorum maximus.

COROL-

COROLLARIUM II.

51. Ex hoc igitur Theoremate, & ex Theor. III. (7. discimus, ex datis duobus punctis ab eadem parte extra rectam positione datam duas rectas ad eandem inclinare, quae *maximum* angulum efficiant.

COROLLARIUM III.

52. Productis CI, CF, CL, CM, patet, omnium angulorum DIQ, DLS, DMT angulum DFR esse *minimum*.

THEOREMA XIII.

53. Si triangulorum quorumlibet ABC, AEF (Fig. 21. 22.) angulum A communem habentium bases omnes BC, EF se in puncto aliquo P interfecent; dico, rectangulum BPC, quod a baseos trianguli isoscelis BAC portionibus efficitur, esse omnium EPF *minimum*.

Dem. Producto in Fig. 22. crure AB, angulus HBP, five BCF > BEP; quare CG efficiens angulum PCG = BEP secabit EF in aliquo puncto G. Jam vero propter triangula similia BEP, PCG habemus BP: PE = PG: PC, adeoque BP. PC = EP. PG; sed EP. PG < EP. PF; ergo BP. PC. < EP. PF. Q. E. D.

COROLLARIUM

54. Si ex dato intra angulum A puncto P demittatur ad rectam AD angulum ipsum bifariam secantem normalis PD, quae anguli cruribus sit utrinque terminata; rectangulum sub segmentis BP, PC erit *minimum* omnium rectangulorum EPF sub segmentis EP, PF quarumvis angulo applicatarum EF per idem datum punctum P transeuntium.

THEOREMA XIV.

55. Ex omnium perpendicularium a triangulorum cum aequalium, tum isoperimetrorum angulis ad bases subiectas demissarum, aggregatis; illud, quod fit in triangulo aequilatero, est *maximum*.

Id ex dictis (9. 12.) sponte fluit.

COROLLARIUM

56. Vicissim inter omnia triangula, in quibus aggregata ex perpendicularibus ab angulis in bases subjectas demissis sunt aequalia, aequilaterum *minimam* habet cum aream, tum perimetrum,

THEOREMA XV.

57. *Trianguli rectanguli isoscelis AFB (Fig. 23. 24.) basi AB bifariam in C divisa, inter AB, AC media proportionalis AE inveniatur; deinde ex puncto E erecta usque ad latus FB normali ED, junctaque AD, ipsi usque ad basim AB excitetur normalis DG; tum supra, vel infra AD ducta quavis Ad, eique excitata usque ad basim AB normali dg, nec non demissa normali de; omnium Aeteg esse AE†EG minimam.*

Dem. Quoniam $AF = AE$, anguli AFD , AED recti, & AD ipsis subjecta communis, triangula AFD , AED erunt aequalia, & similia, adeoque angulus FAB bifariam dividetur ab AD . Age DH ipsi AF parallelam, & junge Gd . Ob angulos ADH , DAH aequales, erit $AH = HD$, quare per tria puncta A, D, G transibit circulus, cujus centrum H , tangens BF . Angulus igitur rectus ADG major angulo AdG , ac proinde quum normalis dg punctum g ultra punctum G necessario cadat, erit $AE†FG < Aeteg$. Q. E. D.

SCHOLIUM.

58. Quum sit $EB = ED$, $eB = ed$, erit EG tertia proportionalis post AE , EB ; & eg tertia proportionalis post Ae , eB .

THEOREMA XVI.

59. Sit recta AB (Fig. 25.) bifariam secta in C , et non bifariam in E , ita ut habeatur $AB:AE = AE:AC$; sitque praeterea angulus quilibet DAB , ductaque BM parallela rectae DA , per E agatur MD rectis AD , BN utrinque terminata; dico aggregatum triangulorum

lorum similium AED, BEM esse omnium possibilium triangulorum similium AFD, BFN ex alterius rectae DN cum AB inter sectione F genitorum minimum.

Dem. Inventa EG tertia proportionali post AE, EB, nec non FH tertia proportionali post AF, FB, junge BD. Triang. BEM:BED = ME:ED = BE:EA = EG:EB; itidemque triang. BED:BAD = EB:AB; ergo ex aequo BEM:BAD = EG:AB; sed triang. AED:BAD = AE:AB; ergo duas habemus analogias.

$$\text{BEM:BAD} = \text{EG:AB}$$

$$\text{AED:BAD} = \text{AE:AB}$$

Eodem prorsus ordine duae aliae invenientur analogiae.

$$\text{BFN:BAD} = \text{FH:AB}$$

$$\text{AFD:BAD} = \text{AF:AB}$$

Quare permutando, & componendo, triang. BEM + AED:BFN + AFD = AE + EG:AF + FH. Sed AE + EG est minimum (57.); &c.

THEOREMA XVII.

60. Sint ABC, DCE (Fig. 26. 27.) duo triangula similia angulos aequales sibi obvertentia. In eorum basibus positae in directum constituentur alia duo triangula BFC, CGE, quae simul sumpta triangulis ABC, DCE sint isoperimetra; dico in triangulis similibus aggregatum altitudinum, hoc est AH + DI, esse maximum.

Dem. Demissae normales AH, DI producantur, donec fiat HM = HF, HL = HA, junctisque LC, MC, MG, agantur LQ, MR eidem HI parallelae usque ad occursum normalis GQ. Perspicuum est, ob angulos aequales HCL, DCI, rectas LC, CD esse in directum, adeoque MC protractam in K excurrere intra triangulum CDE in Fig. 26. & extra in Fig. 27. MG verò secare HC (Fig. 26.), vel CI (Fig. 27.) in aliquo

puncto N. Itaque $\overline{MC} + \overline{CG} = \overline{LD} > \overline{MG}$, & $\overline{LD} > \overline{MG}$,

seu $\overline{DQ}^2 + \overline{QL}^2 > \overline{GR}^2 + \overline{RM}^2$, quare ablati aequalibus $\overline{QL}^2$,

$\overline{RM}^2$, fiet $\overline{DQ}^2 > \overline{GR}^2$, & $\overline{DQ} > \overline{GR}$, seu $\overline{AH} + \overline{DI} > \overline{FH} + \overline{GI}$. Q. E. D. COROL-

COROLLARIUM I.

61. Si triangula BAC, CDE sint similia, & aequalia, erunt omnium triangulorum BFC + CGE etiam non isoscelium *maxima*; quod ex dictis (10.) liquet, si pro isoscele FBC aliud isoperimetrum sub aequali base BC, & altitudine FH substituatur, idemque fiat, si libeat, ratione habita ad aliud triangulum CGE.

COROLLARIUM II.

62. Vicissim si duo triangula similia, & alia duo quaecumque habeant sub iisdem basibus aequale altitudinum aggregatum, triangula similia *minima* cingentur perimetro.

THEOREMA XVIII.

63. *Omniū figurarum ejusdem generis isoperimetrarum maxima est aequilatera, & aequiangulara.*

Dem. Si negas, esse aequilateram; in poligono FBCDE (*Fig. 28.*) sint duo saltem latera FB, FE inaequalia. Juncta BE, construatur super ipsam triangulum isosceles ABE triangulo FBE isoperimetrum. Erit ABE $\triangleright$ FBE (10.), adeoque polygonum FBCDE non aequilaterum non est maximum; *quod erat primum.*

Quoniam ex omnibus figuris rectilineis ejusdem generis isoperimetris non aequilateris *maxima* (*per dem.*) debet esse aequilatera; superest indagandum, quatenam ex hujusmodi figuris aequilateris sit maxima. Sed ex omnibus figuris rectilineis aequilateris ejusdem generis illa, quae circulo inscribi potest, est maxima (quod suo loco (192.), ne turbetur ordo, demonstrabitur), & haec est aequiangulara; ergo ex omnibus figuris, de quibus est quaestio, *maxima* debet etiam esse aequiangulara; *quod erat secundum.*

COROLLARIUM

64. Vicissim ex omnibus figuris rectilineis ejusdem generis aequalibus aequilatera *minimam* habet perimetrum, & ex omnibus recensitis figuris aequalibus, & aequila-

aequilateris, aequiangulara *maximum* itidem habet perimetrum, quae universim figurarum quarumcumque rectilinearum ejusdem generis aequalium aequilatera simul & aequiangulara *minima* perimetro circumdatur.

T H E O R E M A XIX.

65. Si fuerint quocumque triangula isoscelia aequalia, & similia, & in eorum basibus totidem constituentur triangula, quae simul sumpta sint omnibus isoscelis aequalibus & similibus simul sumptis aequalia, idque in infinitum; ajo, perimetrorum aggregatum in triangulis isoscelijs aequalibus, & similibus esse minimum.

Dem Si negas, faciant id primum triangula, quorum saltem unum non sit isosceles. Super ejus basi construe triangulum isosceles ipsi aequale; hujus perimeter erit minor perimetro trianguli scaleni (1); ergo in triangulis assumptis perimetrorum aggregatum non est minimum, contra hypothesein. Sint secundo triangula omnia isoscelia, quorum saltem duo sint inaequalia. In horum basibus considerentur constituta duo triangula tam ipsis aequalia, quam invicem aequalia, & similia; ista minorem quam inaequalia habebunt perimetrum (62.), quod hypothesein destruit; & hoc semper, donec ad triangula omnia aequalia, & similia deventum sit. Q. E. D.

C O R O L L A R I U M

66. Vicissim si dentur quocumque triangula isoscelia aequalia, & similia, & in eorum basibus totidem constituentur triangula, quae simul sumpta sint omnibus isoscelijs aequalibus, & similibus quocumque modo isoperimetra, triangulorum isoscelium aequalium & similiarum aggregatum erit *maximum*.

T H E O R E M A XX.

67. Si ex centro C (Fig. 29.) polygoni regularis ABDEF ducantur ad omnes angulos rectae CA, CB, CD, CE, CF, idemque peragatur sumpto quovis alio puncto

puncto H vel intra polygonum, vel in ejus perimetro, vel extra; omnium rectarum sic, eductarum aggregatum minimum erit illud, quod ex centro.

Dem. Si enim punctum H sumatur intra polygonum triangula ABC , BCD , DCE , ECF , FCA , quae sunt aequalia, & similia inter se, sunt aequalia dissimilibus AHB , BHD , DHE , EHF , FHA supra bases easdem constitutis; & idem totum efficientibus; quare basibus non computatis, duplum aggregati $CA+CB+CD+CE+CF$ erit minus duplo aggregati $HA+HB+HD+HE+HF$; (65.) adeoque primum aggregatum minus altero; quod erat primum.

Si punctum H sumatur in perimetro (*Fig. 30.*) aut extra (*Fig. 31.*); polygono $ABDEF$ circumscribe polygonum concentricum ejusdem generis $KLMNO$, & ex H , & centro communi C ad ejus angulos age HK , HL , HM , HN , HO , nec non CK , CL , CM , CN , CO . Habebis $CK+CL+CM+CN+CO < HK+HL+HM+HN+HO < HA+AK$, $HB+BL$, $HD+DM$, $HE+EN$, $HF+FO$. Aufer communes AK , BL , DM , EN , FO ; superest $CA+CB+CD+CE+CF < HA+HB+HD+HE+HF$; quod erat secundum & tertium.

C O R O L L A R I U M.

68. Ex pluribus punctis C, H (*Fig. 32.*) exeant quaecumque rectae (non minus vero quam tres) in totidem puncta diversa I, K, L, M, N terminatae; sed ex C procedentes angulos omnes, qui simul quatuor rectos efficiant, invicem aequales constituent; horum aggregatum erit minimum. Productis enim pro libito CI , CK , CL , CM , CN , describe polygonum regulare $ABDEF$ omnia puncta I, K, L, M , includens, tum age HA , HB , HD , HE , HF . Habebis $HI+IA$, $HK+KB$, $HL+LD$, $HM+ME$, $HN+NF > HA+HB+HD+HE+HF$, & potiori jure $> CA+CB+CD+CE+CF$; quare demptis portionibus communibus AI, BK, DL, EM, FN , reliquum $CI+CK+CL+CM+CN$ minus erit reliquo aggregato $HI+HK+HL+HM+HN$. Et Vicissim si possibiles omnes triangulorum isoperimetrorum collectiones supra, bases, singulas singulis datis rectis aequales constitutae, verticibus in unum punctum conveniant; ita ut po-

ut polygona innumera forment; collectio illa, cujus anguli verticales quatuor rectos conflantes sunt invicem aequales, polygonum ceterorum *maximum* efficiet.

SCHOLIUM.

69. Si trium rectarum in unum punctum C (*Fig. 33.*) extremitatibus coeuntium aggregatum *minimum* velimus, oportet, ut ipsae angulos forment, quorum unusquisque sit gr. 120; adeoque hujusmodi rectae ab angulis A, B, D trianguli alicujus ABD exeuntes haberi nequeunt, nisi quilibet angulus minor sit gr. 120. Ut autem inveniatur in tali casu punctum C, descriptis super duo latera BA, AD trianguli dati ABD duobus circuli segmentis ACB, ACD, quorum utrumque capiat angulum gr. 120. communis intersectio C intra dictum triangulum erit punctum quaesitum. Sed quoniam in triangulo ABD, cujus angulus BAD non sit minor gr. 120. methodus ista deficit, alia via est incedendum, quod praestabit sequens.

THEOREMA XXI.

70. In triangulo CBD (*Fig. 34. 35.*) cujus angulus BCD non sit minor gr. 120. duo latera CB, CD angulum istum componentia *minimum* constituunt aggregatum prae omnibus aggregatis, quae a rectis in puncto H vel extra triangulum, vel in ejus perimetro, vel intra sumpto ad angulos B, C, D, sint eductae.

Dem. Lateribus CB, CD (*Fig. 34.*) in infinitum protensis, punctum H sumatur prius extra angulum MCN, vel in ejusdem cruribus, excepto puncto C. Si extra; junctis de more HB, HC, HD, patet, ob $HB + HC > BC$, & $HD > CD$, fore $BC + CD < HB + HC + HD$; idem evidens est, si punctum H statuatur in alterutro crure CM, CN. Supereft igitur, ut idem, demonstremus, posito puncto H intra angulum MCN. Pro quo demissis ex H in latera CB, CD (*Fig. 35.*) normalibus HI, HL, junctaque IL divisa bifariam in P, circa diametrum CH describe circulum, qui transibit per puncta I, L; praeterea ducta per P diametro QR, junge QI, QL, HI, HD. Duo

Duo adfunt triangula IQL, ICL, ifofceles primum, fca-
lenum alterum, quorum basis IL communis, & anguli
ad verticem IQL, ICL aequales, adeoque ex dictis
(14.) $IQ \cdot QL > IC + CL$. Quoniam, vero IQR est faltem
angulus gr. 60, erit arcus IR tertia pars circuli, ac
proinde IQ (latus hexagoni regularis inſi circulo inſcri-
pti) radium adaequabit, ex quo $QI + QL = QR$, & $IC + CL < QR$. Si angulus IQL major ſit angulo gr. 120, li-
quet, latera QI, QL fieri breviora; quare tunc QI, QL,
multoque magis $IC + CL < QR = CH$. Hiſce rite perceptis,
propter $BI < BH$, $DL < DH$, fiet $BC + CD < HB + HC + HD$.
Sed hoc ſemper accidit ubicumque intra angulum, MCN
ſtatuatur punctum H; ergo &c.

C O R O L L A R I U M

71. Si trianguli ABD (Fig. 36.) angulus aliquis mi-
nor ſit gr. 120, ac libeat ad ejus laterum dimidia C,
E, F ducere ex aliquo puncto tres rectas, ita ut eorum
aggregatum ſit *minimum*, jungantur CE, CF, EF; exur-
get triangulum, CEF ſimile triangulo ABD, eſt enim
BEFC parallelogrammum, cujus diagonalis EC, adeo-
que invento (69.) puncto H, ex quo ductarum HC,
HF, HF aggregatum ſit minimum, hoc erit etiam *mi-
nimum* quaefitum. At ſi quis ex angulis dicti triangu-
li ABD, puta A, non ſit minor gr. 120, & punctum
optemus, ex quo ductae ad puncta C, E, F rectae *mi-
nimum* faciant aggregatum, punctum hoc erit in dimi-
dio rectae BD angulo A ſubtenſae; actis enim, ut
ſupra, CE, CF, EF, quum ſit ang. $ECF = BAD$, erit
 $CE + CF$ *minimum* prae quolibet alio aggregato $HC + HE + HF$.

T H E O R E M A XXII.

72. Ex omnibus quadratis, quae bina, terna, quater-
na, quina, & ita porro in infinitum aſſumantur, & in
quibus ſic aſſumptis arearum aggregata ſint conjunctim
aequalia, duo, vel tres, vel quatuor, vel quinque &c.
quadrata ſingula invicem aequalia maxima prae totidem
non omnibus invicem aequalibus perimetro pollent.

Dem.

Dem. Quod attinet ad quadrata, quae bina sint accepta, id jam fuit demonstratum (16.). Quamobrem

sint quatuor quadrata A^2, B^2, C^2, D^2 . Sumantur bina pro

libito, fiatque $F^2 + F^2 = A^2 + C^2$; $G^2 + G^2 = B^2 + D^2$.

Quatuor quadrata F^2, G^2, F^2, G^2 majorem simul habebunt

perimetrum quam data A^2, B^2, C^2, D^2 , quibus aequantur.

Fiat praeterea $H^2 + H^2 = F^2 + G^2$; $H^2 + H^2 = F^2 + G^2$;

quatuor emergent quadrata H^2 invicem aequalia, quae

majorem habebunt perimetrum quam quadrata F^2, G^2 ,

F^2, G^2 , quibus aequantur, ac proinde majorem quam data

A^2, B^2, C^2, D^2 , quibus pariter aequantur.

Idem ratiocinium valet pro quadratis, quae octona fuerint accepta, adeoque demonstratio ad quadratorum classes progressionem geometricam 2, 4, 8, 16, 32, &c. fervantes generatim extenditur. Ista autem progressio reliquis casibus demonstrandis inservit.

Sint enim tria quadrata A^2, B^2, C^2 . Concipe tria qua-

drata, cum invicem, tum ipsis aequalia, nempe H^2 ,

H^2, H^2 . Adde utrinque quadratum H^2 . Fiet $A^2 + B^2 +$

$C^2 + H^2 = 4H^2$. Sed hoc aggregatum majorem illo (*per*

dem.) habet perimetrum; ergo ablato hinc inde quadra-

to H^2 , etiam $3H^2$ majorem habebit perimetrum quam

A^2, B^2, C^2 . Quadrata A^2, B^2, C^2 commutari ponantur,

salva aggregati aequalitate, in omnes formas possibiles;

idem semper pari methodo demonstrabitur. Quocirca aliam obtinuimus geometricam progressionem 3, 6, 12,

24, 48;

24, 48, &c. in cujus omnibus terminis Theorema, verum
reperitur. Dentur siquidem sex quadrata $P^2, Q^2, R^2, S^2,$
 T^2, V^2 , sumptisque ternis ad libitum, ex. gr. $P^2, R^2,$
 S^2, Q^2, T^2, V^2 ; statuatur $3F^2 = P^2 + R^2 + S^2$; $3G^2 = Q^2$
 $+ T^2 + V^2$; tum capitis $H^2 + H^2 = F^2 + G^2$, prodibit $6H^2$
 $= P^2 + Q^2 + R^2 + S^2 + T^2 + V^2$; sex autem quadrata
aequalia H^2 majori quam sex data inaequalia, quae
adaequant, perimetro cingentur.

Si fuerint quinque quadrata A^2, B^2, C^2, D^2, E^2 , imagi-
nentur quinque H^2 ipsis aequalia, ac deinde tria u-
troque aggregato addantur quadrata aequalia H^2 , quia
numerus 8 primam seriem ingreditur; erit $8H^2 = A^2$
 $+ B^2 + C^2 + D^2 + E^2 + 3H^2$, adeoque $8H^2$ majorem ha-
bebit perimetrum. Deme utrinque $3H^2$; remanebit ut
prius $5H^2 = A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + E^2$, verum $5H^2$ majo-
ri afficietur perimetro, & idcirco aliam habemus pro-
gressionem geometricam 5, 10, 20, 40, 80, &c. & sic in
infinitum. Q. E. D.

COROLLARIUM I.

73. Quoniam quae de quadratis demonstravimus, ad
figuras quascumque planas similes ejusdem generis, ut
monuimus (17.), extenditur; de omnibus quoque
rhombis similibus idem est sentiendum. Sed rhombus
majorem habet perimetrum quam quadratum ipsi ae-
quale (47.); ergo ex omnibus quadratis, rhombisque
similibus, binis, vel ternis, vel quaternis, vel quinis,
& ita porro etiam promiscue acceptis, & in quibus
sic

sic acceptis arearum aggregata sint aequalia, duo, vel tres, vel quatuor, vel quinque &c. rhombi dictis similes, & singuli invicem aequales *maxima* perimetro afficientur.

COROLLARIUM II.

74. Inter omnes figuras rectilineas ejusdem generis, in quibus aggregata quadratorum ex lateribus sunt aequalia, regularis *maximam* habet perimetrum.

THEOREMA XXIII.

75. Sit numerus quilibet quadratorum invicem aequalium; sint totidem quadrata, non omnia invicem aequalia, sed simul sumpta dictis invicem aequalibus isoperimetra; dico, quadratorum invicem aequalium aggregatum esse prae omnibus inaequalium aggregatis minimum.

Dem. si negas; faciant id quocumque quadrata, quorum saltem duo sint inaequalia, puta quinque, nimirum

$A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + E^2$. Quadratis duobus inae-

qualibus A, C concipe isoperimetra duo quadrata invicem

aequalia $H^2 + H^2$; ista quadratis $A^2 + C^2$ erunt mi-

nora (33.); quare quadrata $A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + E^2$

non component aggregatum minimum, contra id quod positum fuerat; & ita semper, qualiscumque sit quadratorum numerus, donec ad quadrata omnia invicem aequalia deventum sit; ergo &c.

COROLLARIUM I.

76. Quum pro quadratis rhombi similes substitui possint (17.) & rhombus quadrato isoperimetro sit minor (42.), quilibet rhomborum similium & aequalium numerus *minimum* arearum aggregatarum prae totidem quadratis, vel rhombis similibus conjunctim isoperimetris, etiam promiscue sumptis, constituet.

COROLLARIUM II.

77. Si recta in quocumque partes aequales, & in totidem inaequales quomodocumque secetur, aggregatum quadratorum portionibus aequalibus insistentium erit *minimum* aggregatorum omnium ex quadratis in portionibus inaequalibus constitutis. Aggregatum autem rhomborum similium in portionibus invicem aequalibus constitutorum erit *minimum* aggregatorum omnium, quae ex quadratis, vel ex rhombis similibus, vel ex utrisque commixtis, & in ejusdem rectae portionibus inaequalibus innixis, emergunt.

COROLLARIUM III.

78. Inter omnes figuras rectilineas ejusdem generis cum isoperimétris, tum aequales, regularis *minimum* habet aggregatum quadratorum, quae a lateribus fiunt. Si enim sunt aequales, minimum regularis habet perimetrum (64.); sed cum perimetri sunt aequales, quadrata ex lateribus aequalibus minimum faciunt aggregatum (75.); ergo hujusmodi latera aequalia id multo magis efficiunt, si aequaliter singula imminuantur.

THEOREMA XXIV.

79. In recta AB. (Fig. 37.) ita divisa in C, ut sit $CB = \frac{1}{m} AB$ (per m numerum quamvis integrum affirmatorum, unitate exclusa, designo) sumpto quocumque alio puncto D, ajo, fore $\overline{AC}^2 + (m-1) \overline{CB}^2 < \overline{AD}^2 + (m-1) \overline{DB}^2$.

Dem. Si $m = 3$, erit $CB = \frac{1}{3} AB$. Itaque in PQ (Fig. 38.) = AB sumpta $RQ = DB$, secantur AC, PR bifariam in E, S. Habemus $\overline{AE}^2 + \overline{EC}^2 + \overline{CB}^2 < \overline{PS}^2 + \overline{SR}^2 + \overline{RQ}^2$ (77.), adeoque $2\overline{AE}^2 + 2\overline{EC}^2 + 2\overline{CB}^2 < 2\overline{PS}^2 + 2\overline{SR}^2$

$\overline{SR}^2 + 2\overline{RQ}^2$, seu $\overline{AC}^2 + 2\overline{CB}^2 < \overline{PR}^2 + 2\overline{RQ}^2$, nimirum $\overline{AC}^2 + 2\overline{CB}^2 < \overline{AD}^2 + 2\overline{DB}^2$. Si $m=4$, erit $CB = \frac{1}{4}AB$ (*Fig.*

39. 40.,) quare in PQ, = AB sumpta $RQ=DB$, dividantur AC, PR in tres partes aequales AF, FE, EC,

nec non PT, TS, SR. Erit $3\overline{AF}^2 + 3\overline{FE}^2 + 3\overline{EC}^2 + 3\overline{CB}^2$

$< 3\overline{PT}^2 + 3\overline{TS}^2 + 3\overline{SR}^2 + 3\overline{RQ}^2$ (77.), sive $\overline{AC}^2 + 3\overline{CB}^2$

$< \overline{PR}^2 + 3\overline{RQ}^2$, videlicet $\overline{AC}^2 + 3\overline{CB}^2 < \overline{AD}^2 + 3\overline{DB}^2$. Si m

= 5, invenietur $\overline{AC}^2 + 4\overline{CB}^2 < \overline{AD}^2 + 4\overline{DB}^2$.

Eodem igitur ordine procedendo, eò tandem devenietur, ut ex certa numerorum progressionem statui tandem possit,

esse generatim $\overline{AC}^2 + (m-1)\overline{CB}^2 < \overline{AD}^2 + (m-1)\overline{DB}^2$, posita $CB = \frac{1}{m}AB$. Q. E. D.

COROLLARIUM.

80. Si magnitudinis $\overline{AC}^2 + 2\overline{CB}^2 < \overline{AD}^2 + 2\overline{DB}^2$ dimidium accipiatur, fiet $\frac{1}{2}\overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 < \frac{1}{2}\overline{AD}^2 + \overline{DB}^2$,

existente ut prius $CB = \frac{1}{3}AB$. Similiter si magnitudinis $\overline{AC}^2 + 3\overline{CB}^2 < \overline{AD}^2 + 3\overline{DB}^2$ triens sumatur, prodibit $\frac{1}{3}\overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 < \frac{1}{3}\overline{AD}^2 + \overline{DB}^2$, manente ut supra $CB = \frac{1}{4}AB$. Ergo generatim $\frac{1}{m-1}\overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 < \frac{1}{m-1}\overline{AD}^2 + \overline{DB}^2$ stante semper $CB = \frac{1}{m}AB$. Ubi enim adverte quod si tam quadrata, quam rhombi similes sub ejusdem AB portionibus AC, CB, AD, DB promiscuè considerentur; rhombus sub portione AC una cum rhombis

bis similibus sub reliqua CB, quorum numerus sit $m-1$; vel rhombus sub portione CB unà cum rhombis similibus sub reliqua AC, quorum numerus sit $\frac{1}{m-1}$ aggregatum *minimum* efficient, retenta semper $CB = \frac{1}{m} AB$.

S C H O L I O N.

81. Alio quoque modo praesens Theorema ostendi potest.

Demonstrationem in studiosae Juventutis gratiam hinc adnectere non gravabor; sed lemma est praemittendum, videlicet.

In recta AD (*Fig. 150 151.*) ita divisa in C, ut fiat $mDC = AD$, sumatur quodvis aliud punctum E,

ponaturque $BE \cdot ED = CD \cdot AF$; dico, fore $\overline{AE}^2 + (m-1)$

$\overline{ED}^2 = ADF$. Sit enim E inter puncta B, D (*Fig. 150.*), seceturque $CB = CD$. Quoniam $BD = 2CD$, erit $mBD = 2mCD = 2AD$ (*per hyp.*); quare $mBE = mBD - mDE = 2AD - mDE = 2AE + 2DE - mDE = 2AE + (2-m) DE$; ergo

$2AE \cdot DE + (2-m) \overline{DE}^2 = mBE \cdot DE = mCD \cdot AF = DAF$.

sed $ADF = \overline{AD}^2 - DAF = \overline{AE}^2 + \overline{DE}^2 + 2AED - DAF$; ergo

$ADF = \overline{AE}^2 + (m-1) \overline{DE}^2 + (2-m) \overline{DE}^2 - (2-m) \overline{DE}^2$

$+ 2AED - 2AED = \overline{AE}^2 + (m-1) \overline{DE}^2$; quod erat primum.

Puncto E inter puncta A, B (*Fig. 151.*) constituto, habemus $BE = DE - BD$; $mBE = mDE - mBD = mDE - 2AD = mDE - 2AE - 2DE = (m-2) DE - 2AE$. Quare $mBE \cdot ED =$

$(m-2) \overline{DE}^2 - 2AE \cdot ED = mCD \cdot AF = DAF$; ergo $ADF =$

$\overline{AD}^2 + DAF = \overline{AE}^2 + \overline{DE}^2 + 2AED + DAF = \overline{AE}^2 + (m-1)$

$\overline{DE}^2 + 2AED - 2AED + (m-2) \overline{DE}^2 + (2-m) \overline{DE}^2 = \overline{AE}^2$

$+ (m-1) \overline{DE}^2$; quod erat secundum.

Hicce

Hisce praejactis, ajo, $\overline{AC}^2 + (m-1)\overline{CD}^2 < \overline{AE}^2 + (m-1)\overline{ED}^2$. Etenim sumpta $AG=CD$, erit $\overline{AE}^2 + (m-1)\overline{ED}^2 = \overline{ADF}$; $\overline{AC}^2 + (m-1)\overline{CD}^2 = \overline{ADG}$; sed $\overline{ADG} < \overline{ADF}$ (quod in *Fig. 151.* perspicuum est, in *Fig. vero 150.* ob $CD.AF=BE.ED$, & $BE.ED < BC.CD$, est etiam $CD.AF < CD.BC$, seu $CD.AF < CD.AG$, adeoque $AF < AG$); ergo &c.

T H E O R E M A XXV.

82. Si ex duobus punctis DE (*Fig. 1.*) extra rectam AB positione datam ab eadem parte agantur ad ipsam AB quotlibet rectae EC, DC, EI, DI facientes angulos DCE, DIE, quorum vertices C, I sint in eadem AB; tum ex punctis D, E demittantur supra AB normales DG, EF; si punctum C in dimidio interceptae GF consistat, dico, aggregatum quadratorum ex rectis EC, CD, videlicet $\overline{EC}^2 + \overline{CD}^2$ esse minimum.

Dem. Triangula rectangula CFE, CGD exhibet $\overline{CE}^2 = \overline{CF}^2 + \overline{FE}^2$, $\overline{CD}^2 = \overline{CG}^2 + \overline{GD}^2$; ob eandem rationem habemus $\overline{IE}^2 = \overline{IF}^2 + \overline{FE}^2$, $\overline{ID}^2 = \overline{IG}^2 + \overline{GD}^2$. Sed $\overline{CF}^2 + \overline{CG}^2 < \overline{IF}^2 + \overline{IG}^2$ (33.); ergo $\overline{CF}^2 + \overline{FE}^2 + \overline{CG}^2 + \overline{GD}^2 < \overline{IF}^2 + \overline{FE}^2 + \overline{IG}^2 + \overline{GD}^2$, seu $\overline{EC}^2 + \overline{CD}^2 < \overline{EI}^2 + \overline{ID}^2$. Q. E. D.

T H E O R E M A XXVI.

83. Datis triangulo aequilatero ABC (*Fig. 41. 42. 43.*), & alio quovis isoscele DEF ipsi vel isoperimetro, vel aequali; si ex angulis B, E basi utrique BC, EF adjacentibus dimittantur ad crura opposita AC,

C

DE

DF normales BH, EL; dico, aggregatum $\overline{CH}^2 + 2$
 $\overline{AH}^2 + 3 \overline{BH}^2$ esse minus quovis aggregato $\overline{FL}^2 + 2 \overline{DL}^2$
 $+ 3 \overline{EL}^2$.

Dem. Etenim propter normalem EL, habemus $2 \overline{DE}^2$
 $= \overline{DE}^2 + \overline{DF}^2 = 2 \overline{DL}^2 + 2 \overline{EL}^2$, pariterque $\overline{EF}^2 = \overline{FL}^2 + \overline{EL}^2$,
 quare $\overline{DE}^2 + \overline{DF}^2 + \overline{EF}^2 = \overline{FL}^2 + 2 \overline{DL}^2 + 3 \overline{EL}^2$. Eodem mo-
 do demonstrabitur $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{CH}^2 + 2 \overline{AH}^2 + 3$
 $\overline{BH}^2$. Sed tria quadrata invicem aequalia $\overline{AB}^2, \overline{AC}^2, \overline{BC}^2$,
 utpote tribus quadratis $\overline{DE}^2, \overline{DF}^2, \overline{EF}^2$ isoperimetra, sunt
 ipsis semper minora, quod multo magis contingit cum
 triangula sunt aequalia (78.); Ergo in utroque casu
 aggregatum $\overline{CH}^2 + 2 \overline{AH}^2 + 3 \overline{BH}^2$ erit semper minus ag-
 gregato $\overline{FL}^2 + 2 \overline{DL}^2 + 3 \overline{EL}^2$ Q. E. D.

C O R O L L A R I U M

§4. Vicissim si in triangulis isoscelijs expositis fue-
 rit $\overline{CH}^2 + 2 \overline{AH}^2 + 3 \overline{BH}^2 = \overline{FL}^2 + 2 \overline{DL}^2 + 3 \overline{EL}^2$; aequilaterum
 ABC maximam habebit cum aream, tum perimetrum.

L E M M A.

§5. Si in quocumque triangulo ABD (Fig. 44.) e
 laterum dimidijs E, F, H, agantur ad subiectos an-
 gulos rectae ED, FA, HB; dico, istas mutuo interse-
 cari in eodem puncto C, ita ut CE, CF, CH sint sin-
 gulae respondentium DE, AF, BH subtriplae.

Dem. Juncta EH, sige duas tantum ED, HB du-
 ctas esse. Quum EH bifariam secet (ex hyp.) la-
 tera

tera AB, AD, erit lateri BD parallela, nec non (ob AB duplam AE) ejusdem BD pars dimidia. Sed propter triangula similia BCD, ECH, stat $DC : CE = BD : EH$; ergo DC est dupla CE, adeoque $CE = \frac{1}{3} DE$. Pa-

ri modo demonstrabitur $HC = \frac{1}{3} HB$. Concipe nunc, duas tantum ductas esse FA, HB, & junge FH. Ob FH ipsi AB parallelam, ostendetur eodem ratiocinio $FC = \frac{1}{3} AF$, & $HC = \frac{1}{3} BH$; quare tres AF, DF, BH, quarum portiones CF, CE, CH sunt earum respective pars tertia, per idem punctum C necessario transibunt. Q. E. D.

T H E O R E M A XXVII.

86. Si in quocunque triangulo ABD (Fig. 45.) recta AF (quae, ducta ex vertice A basim BD bifariam dividit) secetur in C, ita ut CF sit totius AF pars tertia, & ex C agantur CB, CD; dico, aggregatum $\overline{CA}^2 + \overline{CB}^2 + \overline{CD}^2$ esse minimum.

Dem. Demittatur ex C in basim BD normalis CH, sitque AFB angulus obtusus; habetur

$$\overline{CB}^2 = \overline{BF}^2 + \overline{CF}^2 + 2 BF. FH$$

$$\overline{CD}^2 = \overline{BF}^2 + \overline{CF}^2 - 2 BF. FH; \text{ quare}$$

$$\overline{CB}^2 + \overline{CD}^2 = 2 \overline{BF}^2 + 2 \overline{CF}^2; \text{ adeoque}$$

$$\overline{CB}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{CA}^2 = \overline{AC}^2 + 2 \overline{BF}^2 + 2 \overline{CF}^2.$$

Pari modo demonstrabitur $\overline{KA}^2 + \overline{KB}^2 + \overline{KD}^2 = \overline{AK}^2 + 2 \overline{BF}^2 + 2 \overline{KF}^2$. Itaque quum sit $\overline{AC}^2 + 2 \overline{CF}^2 < \overline{AK}^2 + 2 \overline{KF}^2$ (79), erit quoque $\overline{AC}^2 + 2 \overline{CF}^2 + 2 \overline{BF}^2 < \overline{AK}^2 + 2 \overline{KF}^2 + 2 \overline{BF}^2$.

Praeterea si sumpto puncto K (*Fig. 46.*) extra rectam AF, agantur KA, KB, KD, KF, demittaturque normalis KL supra BD; demonstrabitur $\overline{KA}^2 + \overline{KB}^2 + \overline{KD}^2 = \overline{AK}^2 + 2\overline{BF}^2 + 2\overline{FK}^2$; adeoque $\overline{CA}^2 + \overline{CB}^2 + \overline{CD}^2 : \overline{KA}^2 + \overline{KB}^2 + \overline{KD}^2 = \overline{AC}^2 + 2\overline{CF}^2 + 2\overline{BF}^2 : \overline{AK}^2 + 2\overline{KF}^2 + 2\overline{BF}^2$. Sed $\overline{AC}^2 + 2\overline{CF}^2 + 2\overline{BF}^2 < \overline{AK}^2 + 2\overline{KF}^2 + 2\overline{BF}^2$ (ubique enim in recta = AK + KF accipiat punctum K, fit semper $\overline{AC}^2 + 2\overline{CF}^2 < \overline{AK}^2 + 2\overline{KF}^2$ ob AF < AK + KF, idque si K sit etiam in trianguli perimetro, vel extra); ergo &c.

COROLLARIUM I.

87. Juncta EF (*Fig. 44.*), postquam ad trianguli cujuslibet ABD laterum dimidia E, F, H ductae sint ab angulis oppositis rectae AF, BH, DE; patet, ipsam utpote rectae AD parallelam, esse bifariam divisam in I ab HB, quod eadem de causa etiam rectae FH contingit in L; quocirca trianguli EFH latera sunt bifariam secta in punctis I, G, L; ergo in triangulo ABD si in recta AF ex angulo quovis A ad lateris oppositi BD dimidium F ducta, sumatur punctum C, quod abscindat $CF = \frac{1}{3} AF$, & ex illo ad dimidia reliquorum laterum ipsius trianguli agantur CE, CH; aggregatum $\overline{CE}^2 + \overline{CF}^2 + \overline{CH}^2$ erit *minimum*; ac proinde

COROLLARIUM II.

88. Stantibus iisdem, ductisque ex punctis C, K (*Fig. 47.*) ad angulos A, B, D, & ad laterum dimidia E, F, H rectis CA, CB, CD, CE, CF, CH, nec non KA, KB, KD, KE, KF, KH, erit aggregatum $\overline{CA}^2 + \overline{CB}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{CE}^2 + \overline{CF}^2 + \overline{CH}^2$

$\overline{CD}^2 + \overline{CE}^2 + \overline{CF}^2 + \overline{CH}^2$ minimum prae quovis alio aggregato
 $\overline{KA}^2 + \overline{KB}^2 + \overline{KD}^2 + \overline{KE}^2 + \overline{KF}^2 + \overline{KH}^2$.

T H E O R E M A XXVIII.

89. In quolibet triangulo ABD (Fig. 48.), ducta ex angulo quovis A ad subtensam BD recta AF, quae ipsam bisariam secet in F, tum sumptis hinc inde a puncto F punctis M, N, ut sit MF = FN, accipiatur in AF punctum C, quod resceat $CF = \frac{1}{5} AF$, junganturque CB,

CD, CM, CN; ajo, aggregatum, $\overline{CA}^2 + \overline{CB}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{CM}^2 + \overline{CN}^2$ esse minimum aggregatorum omnium ex quadratis rectarum ab alio puncto ubicumque sumpto eductarum, & in iisdem punctis A, B, M, N, D terminatarum.

Dem: Sumpto in AF quovis alio puncto K, age KB, KM, KN, KD, & ex C demitte in BD normalem CH. Posito angulo CFM obtuso, fiet

$$\overline{CM}^2 = \overline{MF}^2 + \overline{CF}^2 + 2 MF. FH$$

$$\overline{CN}^2 = \overline{MF}^2 + \overline{CF}^2 - 2 MF. FH$$

$$\overline{CM}^2 + \overline{CN}^2 = 2 \overline{MF}^2 + 2 \overline{CF}^2$$

$$\overline{CA}^2 + \overline{CM}^2 + \overline{CN}^2 = \overline{AC}^2 + 2 \overline{CF}^2 + 2 \overline{MF}^2$$

$$\overline{CA}^2 + \overline{CM}^2 + \overline{CN}^2 + \overline{CB}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{AC}^2 + 4 \overline{CF}^2 + 2 \overline{BF}^2 + 2 \overline{MF}^2$$

Similiter demissa supra BD ex K normali KL, ostendetur $\overline{KA}^2 + \overline{KB}^2 + \overline{KM}^2 + \overline{KN}^2 + \overline{KD}^2 = \overline{AK}^2 + 4 \overline{KF}^2 + 2 \overline{BF}^2 + 2 \overline{MF}^2$; quapropter quum sit $\overline{AC}^2 + 4 \overline{CF}^2 < \overline{AK}^2 + 4 \overline{KF}^2$ (79), erit etiam $\overline{AC}^2 + 4 \overline{CF}^2 + 2 \overline{BF}^2 + 2 \overline{MF}^2 < \overline{AK}^2 + 4 \overline{KF}^2 +$

$2\overline{BF}^2 + 2\overline{MF}^2$. Sed ubicumque vel intra, vel extra triangulum, vel in ejus perimetro punctum K accipiatur, idem semper, ut paulo ante vidimus (86.), ostendi potest; ergo &c.

COROLLARIUM I.

90. Si praeter puncta M, N, alia P, Q a puncto F aequidistantia sumantur, & sic in infinitum per progressionem 2, 4, 6, 8, 10, &c: *minimum* semper erit aggregatum illud quadratorum in progressionem 3, 5, 7, 9, &c. crescentium, quae a rectis a puncto C exeuntibus, & in ejusmodi punctis terminatis efficiuntur, prae totidem quadratis ex rectis a quovis alio puncto ad eosdem terminoseductis; dummodo tamen punctum C ita seligatur, ut CF ad AF rationem habeat, quam unitas ad dictum quadratorum numerum.

COROLLARIUM II.

91. Si AF sit minima rectarum BS, DR ex reliquis trianguli ABD angulis B, D ad dimidia S, R lateram oppositorum AD, AB eductarum, erit $\overline{AC}^2 + n\overline{CF}^2$ *minimum* minimorum, $\overline{BV}^2 + n\overline{VS}^2, \overline{DT}^2 + n\overline{TR}^2$.

COROLLARIUM III.

92. Demissa ex aliquo angulo A (Fig. 49. 50.) trianguli cujuscumque ABD ad basim subjectam BD normali AF, in qua sumpto quovis puncto K, eductae sint ad reliquos angulos rectae KB, KD, et ad alia quotlibet baseos BD puncta quomodocumque sumpta M, N, P aliae rectae KM, KN, KP; si in eadem AF accipiatur punctum C tale, ut FC habeat ad FA rationem, quam unitas ad numerum rectarum KA, KB, KP, KM, KN, KD, atque ex eodem puncto C agantur CB, CP, CM, CN, CD; aggregatum

$\overline{CA}^2 + \overline{CB}^2 + \overline{CP}^2 + \overline{CM}^2 + \overline{CN}^2 + \overline{CD}^2$ prae aggregato quolibet
 $\overline{KA}^2 + \overline{KB}^2 + \overline{KP}^2 + \overline{KM}^2 + \overline{KN}^2 + \overline{KD}^2$ erit *minimum*, idque
 quicumque sit quadratorum numerus; quod ex proxime
 superioribus sponte consequitur.

L E M M A.

93. Sumpto ubicumque intra polygonum quodvis LMNO
 (Fig. 51.) vel in ejus perimetro, vel extra puncto H,
 si ad omnes angulos agantur rectae HL, HM, HN, HO,
 nec non ad laterum dimidia Q, R, S, T rectae HQ,
 HR, HS, HT; dico, residuum $\overline{HL}^2 + \overline{HO}^2 + \overline{HN}^2 + \overline{HM}^2$
 $- \overline{HQ}^2 - \overline{HR}^2 - \overline{HS}^2 - \overline{HT}^2$ semper esse quantitatem constan-
 tem, nimirum $= \frac{1}{4}(\overline{LM}^2 + \overline{MN}^2 + \overline{NO}^2 + \overline{OL}^2)$.

Dem. Demissa ex H ad LO normali HZ, positoque acu-
 to angulo LQH, habemus

$$\overline{HL}^2 = \overline{LQ}^2 + \overline{HQ}^2 - 2 LQZ$$

$$\overline{HO}^2 = \overline{LQ}^2 + \overline{HQ}^2 + 2 LQZ; \text{ unde}$$

$$\overline{HL}^2 + \overline{HO}^2 = 2\overline{LQ}^2 + 2\overline{HQ}^2; \text{ five auferendo hinc inde } 2\overline{HQ}^2,$$

$$\overline{HL}^2 + \overline{HO}^2 - 2\overline{HQ}^2 = \frac{1}{2}\overline{LO}^2; \text{ \& sic de reliquis, nempe}$$

$$\overline{HL}^2 + \overline{HO}^2 - \overline{HQ}^2 = \frac{1}{2}\overline{LO}^2; \overline{HO}^2 + \overline{HN}^2 - 2\overline{HT}^2 = \frac{1}{2}\overline{ON}^2;$$

$$\overline{HN}^2 + \overline{HM}^2 - \overline{HS}^2 = \frac{1}{2}\overline{MN}^2; \overline{HM}^2 + \overline{HL}^2 - 2\overline{HR}^2 = \frac{1}{2}\overline{LM}^2;$$

quibus in unam summam reductis, prodit

$$2\overline{HL}^2 + 2\overline{HO}^2 + 2\overline{HN}^2 + 2\overline{HM}^2 - 2\overline{HQ}^2 - 2\overline{HR}^2 - 2\overline{HS}^2 - 2\overline{HT}^2$$

$$= \frac{1}{2}\overline{LO}^2 + \frac{1}{2}\overline{ON}^2 + \frac{1}{2}\overline{NM}^2 + \frac{1}{2}\overline{ML}^2; \text{ sumptisque dimidiis,}$$

$$\overline{HL}^2 + \overline{HO}^2 + \overline{HN}^2 + \overline{HM}^2 - \overline{HQ}^2 - \overline{HR}^2 - \overline{HS}^2 - \overline{HT}^2 = \frac{1}{4} (\overline{LO}^2 + \overline{ON}^2 + \overline{NM}^2 + \overline{ML}^2); \text{ quod erat primum.}$$

Si punctum H sumatur in latere aliquo LO, sitque Z; erit (per 9. 2. Elem.) $\overline{LZ}^2 + \overline{ZO}^2 = 2\overline{ZQ}^2 + 2\overline{LQ}^2$, adeoque $\overline{LZ}^2 + \overline{ZO}^2 - 2\overline{ZQ}^2 = \frac{1}{2} \overline{LO}^2$; cetera ut ante peragantur, etiam cum punctum H in aliquo angulorum vertice accipitur; quod erat secundum.

Si denique punctum H ponatur in latere aliquo ML ad libitum protrahito, sitque X; erit (per 10. 2. Elem.) $\overline{XM}^2 + \overline{XL}^2 = 2\overline{XR}^2 + 2\overline{LR}^2$, sive $\overline{XM}^2 + \overline{XL}^2 - 2\overline{XR}^2 = \frac{1}{2} \overline{LM}^2$; reliqua methodo exposita ostendentur; quod erat tertium.

COROLLARIUM I.

94. Si polygonum fuerit triangulum ABD (Fig. 44.), in quo ab angulis ad subtensarum dimidia, ductae sint AF,

$$\begin{aligned} & \text{BH, DE; quum ex dictis (85.) sit } \overline{CF}^2 = \frac{1}{4} \overline{AC}^2; \overline{CE}^2 = \\ & \frac{1}{4} \overline{CD}^2; \overline{CH}^2 = \frac{1}{4} \overline{CB}^2; \text{ evadet } \overline{CA}^2 - \frac{1}{4} \overline{CA}^2 + \overline{CB}^2 - \frac{1}{4} \\ & \overline{CB}^2 + \overline{CD}^2 - \frac{1}{4} \overline{CD}^2, \text{ seu } \frac{3}{4} \overline{CA}^2 + \frac{3}{4} \overline{CB}^2 + \frac{3}{4} \overline{CD}^2 = \frac{1}{4} \\ & (\overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 + \overline{DA}^2) \text{ quare sumptis hinc inde quadruplis fiet} \\ & 3\overline{CA}^2 + 3\overline{CB}^2 + 3\overline{CD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 + \overline{DA}^2. \end{aligned}$$

COROLLARIUM II.

95. Si pro polygono habeatur parallelogrammum ABCD (Fig. 52.), punctumque H sumatur in duarum diagonalium AC, BD intersectione; ductis per H recta MN lateri alterutro AB, nec non RS lateri alterutro AD pa-

ral-

parallelis, erit $\overline{HA}^2 + \overline{HB}^2 + \overline{HC}^2 + \overline{HD}^2 - \overline{HM}^2 - \overline{HN}^2 - \overline{HR}^2 =$
 $\overline{HS}^2 = 2\overline{HA}^2 + 2\overline{HB}^2 - 2\overline{HM}^2 - 2\overline{HR}^2 = \frac{1}{2}\overline{AB}^2 + \frac{1}{2}\overline{AD}^2$, seu
 $4(\overline{HA}^2 + \overline{HB}^2 - \overline{HM}^2 - \overline{HR}^2) = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2$, seu $4\overline{HA}^2 + 4\overline{HB}^2 =$
 $\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 + 4\overline{HM}^2 + 4\overline{HR}^2$, seu $\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = 2\overline{AB}^2 + 2\overline{AD}^2$

T H E O R E M A XXIX.

96. *Inter omnia triangula ABD, GIK (Fig. 53. 54) cum isoperimetra, tum aequalia, in quibus ex quocumque puncto rectae ad angulos educantur; si triangulum ABD sit aequilaterum, ac punctum C intra istud assumptum dividat AF (ab aliquo angulo A exeuntem, & isque in subtensae BD dimidium F protractam), ita ut sit*

$CF = \frac{1}{3}AF$; dico aggregatum $\overline{CA}^2 + \overline{CB}^2 + \overline{CD}^2$ fore minimum.

Dem. Finge, punctum L ita esse intra triangulum GIK acceptum, ut aggregatum $\overline{LG}^2 + \overline{LI}^2 + \overline{LK}^2$ comparate ad triangulum ipsum sit minimum. Ex superioribus (94)

stabit $\overline{CA}^2 + \overline{CB}^2 + \overline{CD}^2 : \overline{LG}^2 + \overline{LI}^2 + \overline{LK}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 : \overline{GI}^2$

$+ \overline{GK}^2 + \overline{IK}^2$. Sed si triangula perimetros habeant aequales, crit

$\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 < \overline{GI}^2 + \overline{GK}^2 + \overline{IK}^2$ (75.); ergo $\overline{CA}^2 + \overline{CB}^2$

$+ \overline{CD}^2 < \overline{LG}^2 + \overline{LI}^2 + \overline{LK}^2$, adeoque ceterorum etiam omnium

hujusmodi aggregatorum, sumpto ubicumque puncto L, *minimum* (86.); idque potiori jure si triangula, sint ae-

qualia, tunc enim aequilaterum minimam habet perime-

trum (9.). Q. E. D.

SCHOLIUM.

97. Hoc Theoremate continetur etiam casus, cum rectae ex triangulorum angulis discedentes ipsos bifariam dividunt, notum est enim, hujusmodi rectas in eodem puncto interfecari. Ponamus, in triangulo GIK (Fig. 54) rectas GN, KM, angulos IKG, KGI bifariam dividentes, se interfecare in puncto L, & ex puncto L ad angulum GIK duci LI; dico, ab ista angulum GIK bifariam

dividi. Etenim (per 3. 6. Elem.) habemus GI: GO = IL: LO, pariterque, IK: KO = IL: LO, quare GI: GO = IK: KO; & permutando, GI: IK = GO: KO; adeoque angulus quoque GIK ab LI bifariam dividitur. In triangulo autem aequilatero ABD (Fig. 53.) patet, rectas AF, BH, DE ad laterum dimidia E, F, H ex anguliseductas angulos ipsos bifariam secare, angulosque ACB, ACD, BCD esse invicem aequales.

THEOREMA XXX.

98. Punctis C, L (Fig. 53. 54.) ubicumque sumptis, si ad dimidia E, F, H, M, N, O, laterum triangulorum omnium cum isoperimetrorum, tum aequalium ABD, GIK agantur rectae CE, CF, CH, nec non LM, LN, LO, & in triangulo aequilatero ABD punctam C in recta AF, ex aliquo angulo A ad lateris BD dimidium F

ducta, tale accipiatur, ut sit $CF = \frac{1}{3} AF$; dico, aggregatum, $\overline{CE}^2 + \overline{CF}^2 + \overline{CH}^2$ esse consimilium omnium aggregatorum in triangulo quolibet GIK minimum.

Dem. Ex omnibus triangulorum angulis ad laterum dimidia rectae AF, BH, DE, itidemque GN, IO, KM sinteductae. Junctis EF, FH, HE, nec non MN, NO, OM, positisque triangulis isoperimetris, quoniam $FH = \frac{1}{2} AB$, $EH = \frac{1}{2} BD$, $EF = \frac{1}{2} AD$, pariterque $MN =$

$\frac{1}{2} GK, NO = \frac{1}{2} GI, MO = \frac{1}{2} IK$, etiam triangula, EFH, MNO erunt isoperimetra. Statutis autem iisdem triangulis aequalibus, quum unumquodque sit duplum parallelogrammorum inscriptorum EBFH, MINO, haec parallelogramma erunt aequalia, ac proinde aequalia eorum dimidia, hoc est triangula EFH, MNO. Sed $\overline{CE}^2 + \overline{CF}^2 + \overline{CH}^2$ in triangulo ABD est minimum, & item minimum $\overline{LM}^2 + \overline{LN}^2 + \overline{LO}^2$ in triangulo GIK (87.) praeterea-que in utroque casu primum aggregatum $\overline{CE}^2 + \overline{CF}^2 + \overline{CH}^2$ comparate ad triangulum EFH est minimum omnium aggregatorum $\overline{LM}^2 + \overline{LN}^2 + \overline{LO}^2$ ratione habita ad triangulum MNO (96.); ergo &c.

C O R O L L A R I U M

99. Hinc in utroque casu etiam $\overline{CA}^2 + \overline{CB}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{CE}^2 + \overline{CF}^2 + \overline{CH}^2$ erit *minimum* comparate ad omnia aggregata $\overline{LG}^2 + \overline{LI}^2 + \overline{LK}^2 + \overline{LM}^2 + \overline{LN}^2 + \overline{LO}^2$, adeoque ad reliqua omnia ejusmodi aggregata, ubicumque puncta L collocare libeat. At si rectae ex angulis ad laterum dimidia ductae tantummodo considerentur, statim colligetur, esse quoque aggregatum $\overline{AF}^2 + \overline{BH}^2 + \overline{DE}^2$ prae omnibus aggregatis $\overline{GN}^2 + \overline{IO}^2 + \overline{KM}^2$ *minimum*.

T H E O R E M A XXXI.

100. *Inter omnia aggregata quadratorum ex ambabus*
di-

diagonalibus in parallelogrammis cum isoperimetris, tunc aequalibus; illud, quod fit in quadrato, est minimum.

Dem. Quadrata ex diagonalibus sunt ut aggregata ex laterum quadratis (95.); sed aggregatum ex laterum quadratis in quadrato est minimum, cum omnia parallelogramma sunt isoperimetra (42.), quod multo magis fit verum cum parallelogramma sunt aequalia (47.); ergo &c.

T H E O R E M A XXXII.

101. In quocumque polygono regulari ABDEF (Fig. 29.), cujus centrum C, ductis ad omnes angulos rectis CA, CB, CD, CE, CF, nec non ex puncto H ubicumque sumpto rectis HA, HB, HD, HE, HF; dico, aggregatum

$\overline{CA}^2 + \overline{CB}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{CE}^2 + \overline{CF}^2$ esse minimum prae

quibuslibet aggregatis $\overline{HA}^2 + \overline{HB}^2 + \overline{HD}^2 + \overline{HE}^2 + \overline{HF}^2$.

Dem. Rectae aequales CA, CB, CD, CE, CF, que in C angulos omnes aequales efficiunt, aggregatum component minus aggregato quolibet HA, HB, HD, HE, HF, ubicumque punctum H vel intra, vel extra polygonum, vel in ejus perimetro collocetur (67.). Sed si foret $\overline{CA} + \overline{CB} + \overline{CD} + \overline{CE} + \overline{CF} = \overline{HA} + \overline{HB} + \overline{HD} + \overline{HE} + \overline{HF}$, foret etiam $\overline{CA}^2 + \overline{CB}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{CE}^2 + \overline{CF}^2 \leq \overline{HA}^2 + \overline{HB}^2 + \overline{HD}^2 + \overline{HE}^2 + \overline{HF}^2$ (75.); ergo potiori jure prius quadratorum aggregatum minus erit posteriori. Q. E. D.

C O R O L L A R I U M I.

102. Itidem si puncta C, H cum punctis G, I, K, L, M polygones latera bifariam secantibus connectantur,

pari modo demonstrabitur $\overline{CG}^2 + \overline{CI}^2 + \overline{CK}^2 + \overline{CL}^2 + \overline{CM}^2 \leq$

$\overline{HG}^2 + \overline{HI}^2 + \overline{HK}^2 + \overline{HL}^2 + \overline{HM}^2$; est enim $\overline{CG} + \overline{CI} + \overline{CK} + \overline{CL} + \overline{CM}$ aggregatum minimum prae omnibus aggregatis $\overline{HG} + \overline{HI}$

+ HI + HK + HL + HM, ob angulos GCI, ICK, KCL, LCM, MCG aequales (68.). Id etiam statim apparet, si puncta I, G, M, L, K connectantur, novum quippe prodit polygonum regulare.

COROLLARIUM II.

103. Quapropter summam colligendo, etiam $\overline{CA}^2 + \overline{CB}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{CE}^2 + \overline{CF}^2 + \overline{CG}^2 + \overline{CI}^2 + \overline{CK}^2 + \overline{CL}^2 + \overline{CM}^2$ Merit minimum.

THEOREMA XXXIII.

104. Inter omnia polygona ejusdem generis cum isoperimetra, tum aequalia ABDE, LMNO (Fig. 51. 55.), in quibus ex punctis quibuscumque C, H vel intra, vel extra ipsa, vel in eorum perimetris acceptis,eductae sint ad omnes angulos rectae CA, CB, CD, CE, nec non HL, HM, HN, HO, & ad laterum dimidia rectae CF, CG, CI, CK, pariterque HQ, HR, HS, HT; regulare ABDE

habet quodcumque $\overline{CA}^2 + \overline{CB}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{CE}^2 - \overline{CF}^2 - \overline{CG}^2 - \overline{CI}^2 - \overline{CK}^2$ semper minus quocumque $\overline{HL}^2 + \overline{HM}^2 + \overline{HN}^2 + \overline{HO}^2 - \overline{HQ}^2 - \overline{HR}^2 - \overline{HS}^2 - \overline{HT}^2$.

Dem. Quum enim primum residuum sit ad secundum, ut $\overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 + \overline{DE}^2 + \overline{EA}^2$ ad $\overline{LM}^2 + \overline{MN}^2 + \overline{NO}^2 + \overline{OL}^2$ (93.), sitque $\overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 + \overline{DE}^2 + \overline{EA}^2 < \overline{LM}^2 + \overline{MN}^2 + \overline{NO}^2 + \overline{OL}^2$ (75.); erit in utroque casu primum residuum altero minus. Q. E. D.

LEMMA.

105. Est triangulum ABC (Fig. 56.) rectangulum in C, & ex angulo B ducatur utcumque ad latus AC intra puncta A, C recta BD; dito, esse AC ad CD in majori ratione quam angulus ABC ad angulum DBC.

Dem.

Dem. Centro B, radio DB describatur peripheria EDF, quae secabit AB in E, & occurret rectae BC in F. Quoniam triangulum ABD majus est sectore BED, & triangulum DBC minus sectore BDF, triangulum ADB ad triangulum DBC majorem habebit rationem quam sector BED ad sectorem BDF; sumptisque proportionalibus, AD: DC > ang. ABD: DBC; seu componendo, AD: CD > ang. ABC: DBC. Q. E. D.

T H E O R E M A XXXIV.

106. *Ex universis figuris rectilineis regularibus isoperimetris, triangulum est minimum.*

Dem. Triangulo aequilatero ABC, & polygono quolibet regulari DEF (*Fig. 57. 58.*) in triangula isoscelia, & aequalia, quorum duo AGC, DHF, resolutis, ex verticibus G, H demitte in bases AC, DF normales GK, HL. Quum sit (*ex hyp.*) AC > DF, AK > DL, sumpta KM = DL, connecte MG. Erit AC ad perimetrum ABCA, ut angulus AGC ad quatuor rectos, pariterque DF ad perimetrum DEFD, ut angulus DHF ad quatuor rectos; quocirca ex aequo AC: DF = ang. AGC: DHF, aut dimidiatim AK: KM = ang. AGK: DHL. Sed AK: KM > ang. AGK: MGK (105.); ergo ang. AGK: DHL > AGK: MGK, adeoque MGK > DHL; idcirco ob angulos ad K, L rectos, ang. GMK < HDL. Fac ang. KMN = HDL, punctum N cadet ultra punctum G, & ob triangula, NMK, HDL aequalia & similia, HL = NK > GK. Sed (*ex hyp.*) habemus GK ad HL, ut triangulum ABC ad polygonum DEF; ergo &c.

C O R O L L A R I U M

107. Deficiente triangulo, ei succedit quadratum, quadrato pentagonum, & sic deinceps. Quamobrem ex figuris regularibus isoperimetris, illa est *minor*, quae minore laterum, vel angulorum numero constat.

THEOREMA XXXV.

108. *Ex universis figuris rectilineis regularibus aequalibus, triangulum maxima gaudet perimetro.*

Dem. Eadem retenta figurarum descriptione, propter ang. $AGC > DHF$ (*Fig. 57. 58.*), fac ang. $KGM = LHD$. Quoniam triang. GAC est ad BAC , ut angulus AGC ad quatuor rectos, & triangulum HDF ad polygonum DEF , ut angulus DHF ad quatuor rectos; erit ex aequo triang. $GAC : HDF = \text{ang. } AGC : DHF$, sumptisque dimidiis, triang. $GAK : HDL = \text{ang. } AGK : DHL$. Sed triang. $GAK : GMK > \text{ang. } AGK : DHL$ (105.); ergo triang. $GAK : GMK > GAK : HDL$, quare triang. HDL majus simili GMK adeoque $HL > GK$. Sed HL ad GK , ut trianguli perimeter ad perimetrum polygoni; ergo &c.

COROLLARIUM

109. *Ex polygonis regularibus aequalibus, illud, quod minori laterum, vel angulorum numero constat, reliquorum majori praeditum est perimetro.*

THEOREMA XXXVI

110. *Ex omnibus parallelogrammis, quae triangulo cui-libet circa eundem angulum inscribi possunt; illud, cujus unum, vel duo protracta latera bifariam secant trianguli latera saltem duo, est maximum.*

Dem. Trianguli ABC (*Fig. 59.*) divisus bifariam lateribus in punctis D, E, F , per ista eidem inscribatur circa angulum B parallelogrammum $BDEF$, & aliud quodvis parallelogrammum $BGHI$. Propter $BF, FC > BI, IC$ (32.) erit $BF : BI > IC : FC$; sed $IC : FC = HI : EF$; ergo $BF : BI > HI : EF$; ex quo $BF, FE > BI, IH$. Sed si foret $BF, FE = BI, IH$, foret etiam parallelogrammum BE aequale parallelogrammo BH (*per 24. 6. Elem.*); ergo parallelogrammo $BDEF$ habens angulum B cum parallelogrammo $BGHI$ communem, erit isto semper majus.
 Q. E. D. Co-

COROLLARIUM. I.

111. Si velis, maximum parallelogrammum triangulo AEC inscriptum, non esse circa angulum B, sed circa angulum A, duc diagonalem DF, eique parallelam IK, & habebis parallelogrammum ADFE, quod quum sit aequale parallelogrammo BDEF, erit *maximum* omnium parallelogrammorum AHIK parallelogrammis BGHI aequalium. *Maximum* autem parallelogrammum circa angulum C erit DFCE, parallelogrammo BDEF & ipsum aequale.

COROLLARIUM II.

112. Si jubeas, parallelogrammum ad quaestionem attingens non habere angulum communem cum aliquo ex angulis trianguli dati AHK. (*Fig. 60.*), cui sit inscribendum; divisis bifariam duobus lateribus, puta AH, AK, in punctis D, E junctaque DE, age DB, EF quomodo libet inter se parallelas usque ad occursum bases HK. Parallelogrammum BDEF erit unum ex *maximis*, quae triangulo AHK inscribi possunt; ducta enim EG lateri AH parallela, parallelogrammum BDEF erit aequale parallelogrammo DEGH. Sed hoc est inscriptorum maximum; ergo & illud.

COROLLARIUM. III.

113. Innumera igitur parallelogramma *maxima*, adeoque invicem aequalia, eidem triangulo inscribi possunt.

COROLLARIUM IV.

114. Idem parallelogrammum DEFB (*Fig. 61.*) esse potest *maximum* inscriptum infinitorum triangulorum, quae nullum habeant angulum cum ipso communem. Ducta enim quavis IC, quae bifariam dividatur ab angulo D dicti parallelogrammi DEFB, jungatur CE, protrahaturque usque ad occursum in L cum latere HK, & ita semper; orientur triangula CIL, AHK, & alia innu-

innumera, quae maximum commune parallelogrammum inscriptum habebunt DEFB; latus enim DE dicti parallelogrammi DEFB duo triangulorum omnium recensitorum latera CI, CL bifariam semper dividit.

COROLLARIUM V.

115. Triangulum est duplum maximi sibi inscripti parallelogrammi, ac propterea omnia triangula, quae idem maximum parallelogrammum, vel aequalia maxima parallelogramma habent inscripta, sunt aequalia; & si sunt aequalia, maxima parallelogramma iis inscripta sunt pariter aequalia; generatim verò triangula sunt ut maxima parallelogramma iis inscripta.

THEOREMA XXXVII.

116. Si per verticem A (Fig. 61.) trianguli cujuscvis AHK fingas in infinitum protendi rectam MN basi HK parallelam; inter omnia triangula, quorum crura per media D, E laterum AH, AK transeant, basesque habeant in recta HK producta, sed vertices vel ultra, vel citra infinitam MN, triangulum AHK erit minimum.

Dem. Quum enim hujusmodi triangulorum crura non sint vi parallelarum bifariam secta, parallelogrammum DEFB non erit eorum maximum, ac proinde minus quam eorum maximum. Sed triangula sunt parallelogrammorum maximorum iis inscriptorum dupla (115.) ergo triangulum AHK est recensitorum triangulorum minimum.

Q. E. D.

THEOREMA XXXVIII.

117. Ex omnibus triangulis eidem parallelogrammo ad eandem altitudinem circumscriptis, triangulum isosceles minima clauditur perimetro.

Dem. Eidem parallelogrammo GATH (Fig. 62.), vel GKIH circumscribantur ad eandem altitudinem BL, vel EP triangula ABC, DEF. Ob $BL = EP$, $ML = NP$, erit

D

BM

$BM = EN$, ac proinde $BM : BL = EN : EP$. Sed $BM : BL = GH : AC$, itidemque $EN : EP = GH : DF$; ergo $GH : AC = GH : DF$, adeoque $AC = DF$; ex quo liquet, triangula BAC , EDF esse aequalia, & intra easdem parallelas. Sed ex hujusmodi triangulis isosceles minimam habet perimetrum (1.); ergo &c.

THEOREMA XXXIX.

118. *Inter universa triangula, quae parallelogrammis omnibus aequalibus circumscribi possunt, isosceles, cujus maximum parallelogrammum inscriptum habet quadratum altitudinis ad baseos quadratum, ut 3 ad 4, minima perimetro circumdatur.*

Dem. Esto inter omnia parallelogramma aequalia parallelogrammum $ABCD$ (Fig. 63.), seu $ABFH$, in quo altitudinis EF quadratum sit ad quadratum baseos CD , vel FH , ut 3 ad 4, eique sit circumscriptum triangulum isosceles GHI , cujus latera a parallelogrammi lateribus bifariam dividantur. Quoniam $CD = FH$, $FE = EG$, erit $\overline{GF}^2 : \overline{FH}^2 = 12 : 4 = 3 : 1$; quare triangulum GHI est aequilaterum. Sed omnia triangula, quorum latera a parallelogrammorum aequalium inscriptorum lateribus bifariam dividuntur sunt & ipsa aequalia (115.); ergo triangulum aequilaterum *minimam* prae ipsis habet perimetrum (9.). At cetera omnia triangula, de quibus est quaestio, sunt dictis aequalibus semper majora (116.); ergo &c.

THEOREMA XL.

119. *Inter omnia parallelogramma triangulis isoperimetris inscripta; illud, in quo altitudinis quadratum est ad quadratum baseos, ut 3 ad 4, ceterorum est maximum.*

Dem. Parallelogrammo $ABCD$ (Fig. 63.), vel $ABFH$, ejus naturae, ut suae altitudinis EF quadratum sit ad quadratum baseos CD , vel FH , in ratione 3 ad 4, concipe

cipe circumscriptum triangulum GHI , cujus latera a parallelogrammi lateribus sint bifariam secta. Triangulum istud erit aequilaterum, adeoque omnium isoperimetricorum maximum (12.). Itaque siingas, singulis triangulis triangulo GHI isoperimetricis maximum inscribi parallelogrammum, singula ejusmodi parallelogramma (quippe quae triangulorum, quibus inscribuntur, sunt dimidia) erunt trianguli GHI parallelogrammo maximo $ABCD$ minora. Sed si dicta parallelogramma non sint iisdem triangulis maxima inscripta multo magis erunt dicto parallelogrammo $ABCD$ minora; ergo &c.





DE MAXIMIS, ET MINIMIS

AD INSTITUTIONES GEOMETRICAS
ACCOMMODATIS

P A R S P R I M A

L I B E R II.

De Circulo, ejusque inscriptis, & circumscriptis.

L E M M A

120. **D** Escripto intra angulum quemvis MAN (Fig. 64.) circulo DEF, vel ejus segmento EDK tangente ipsius anguli crura in E, K, actisque ex quolibet circumferentiae punctis D, T tangentibus BC, GH ad anguli dati crura hinc inde in B, C, G, H; ajo, omnia triangula ABC, AGH hinc prodeuntia esse isoperimetra.

Dem. Propter tangentes BD, BE in puncto B sibi occurrentes, habemus (ex 36. 3i. Elem.) $BD = BE$; quare trianguli ABC perimeter aequatur duabus AE, AK. Pari ratione quum sit $GT = GE$, $TH = HK$, positis communibus AG, AH, trianguli AGH perimeter iisdem AE, AK aequalis erit, ac proinde triangulorum quocumque recensitorum ABC, AGH perimetri semper invenientur aequales. Q. E. D.

T H E O R E M A I.

121. Lemmatis constructione retenta, ductisque praeterea

terea in circuli DEF parte infra EK ex punctis F, R tangentibus MFP, IRL usque ad anguli A crura AM, AN; dico, quod si triangula ABC, AIL sint isoscelia, triangulum ABC in primo casu maximam habebit aream, maximum crurum rectangulum EAK comparate ad reliqua triangula AGH, & tangens BC erit minima omnium GH; in secundo autem casu triangulum AIL minimam prae omnibus AMP habebit cum aream, tum perimetrum, minimum crurum rectangulum IAL, ac tangens IL erit minima omnium MP.

Dem. Quum enim ex lemmate (120.) triangula ABC, AGH sint isoperimetra, angulus A communis, & triangulum ABC isosceles, hoc ex dictis (24.) erit maximum, maximo gaudebit crurum rectangulo, & minimam habebit basim; quod erat primum, secundum, & tertium.

Quia Q punctum intersectionis ipsarum IL, MP est (ratione habita ad punctum I) ultra punctum contactus R, erit $IQ > QL$; sumpta igitur $SQ = QL$, ductaque SV ipsi PL parallela, erunt triangula SQV, PQL similia, & aequalia; quapropter triang. $QPL < QIM$, positoque communi trapetio AIQP, triang. $AIL < AMP$, ergo ex jam ostensis (13. 18.) patet, potiori jure ipsum triangulum AIL minima quoque perimetro, minimo crurum rectangulo, ac basi minima prae ceteris AMP affici; quod erat quartum, quintum, sextum, & septimum.

THEOREMA II.

122. Ex omnibus triangulis ACB, AHB (Fig. 65.) quorum basis communis AB sit extra circulum CDE, verticesque C, H sint in ejusdem circumferentia convexa; illud ACB, cujus crura AC, CB cum circuli radio CF duos angulos ACF, BCF aequales efficiunt, minima claudatur perimetro.

Dem. Finge, duci per punctum C contingentem indefinitam IL, punctumque K, in quo IL secat AH, jungi

cum B. Quoniam anguli ACF, BCF, nec non ICF, LCF sunt aequales, anguli quoque ACI, BCL aequales erunt; ergo aggregatum AC + BC erit minus aggregato quolibet AK + BK (2.) ac multo magis aggregato respondente AH + BH; quare &c.

C O R O L L A R I U M

123. Per hoc igitur Theorema ex datis duobus extra circulum punctis ducere possumus ad circumferentiae convexae punctum duas rectas, quarum aggregatum sit *minimum*.

T H E O R E M A III.

124. Ex omnibus triangulis ACB, AHB (Fig. 66.), quorum basis communis AB sit extra circulum GOCR, vertexque C, H sint in ejus circumferentia concava; illud ACB, cujus crura AC, CB cum contingente DE in contactu C angulos ACD, BCE aequales efficiunt, maxima cingitur perimetro.

Dem. Agatur diameter CG, jungaturque GH; tum per puncta C, H transeat recta CHK, in quam ex punctis A, B demittantur normales AI, BK, ac postmodum ita ductae intelligantur AS, BS, ut anguli ISA, BSK sint aequales. Quoniam ang. LCE = BCD, ac DE est tangens, erit arcus LG aequalis arcui GN, quare arcus MG (transitu rectae AH, & diametri CG resectus) minor est arcu GP a CG, & BH rescisso, ex quo ang. MHG < GHP. Sed anguli GHC, GHK sunt recti; ergo ang. AHI > BHK, ac proinde AI : BK > IH : HK; sed ob triangula similia AIS, BSK, stat AI : BK = IS : SK; ergo IS : SK > IH : HK, unde constat, punctum S esse ultra puncta C, H. Sed AS + SB est minimum aggregatum rectarum, quae ex punctis A, B ad rectam CK duci possunt (2.); ergo quum punctum C a puncto S magis distet quam punctum H, erit AC + BC > AH + HB (8.), adeoque triangulum ACB majori quam AHB perimetro donabitur. Q. E. D.

COROLLARIUM

125. Datis ergo extra circulum duobus punctis, discimus duas rectas ex ipsis ad circumferentiae concavae punctum ducere, quarum aggregatum sit *maximum*.

THEOREMA IV.

126. Si ducta quavis chorda GM (Fig. 67. 68.) rectae AB positione extra circulum GEM datae parallela, ei ex centro F demittatur normalis FD , quae protrahatur usque ad circumferentiam in C , ductaque IL circulum contingente in C , connectantur AC , CB ; dico ex omnibus triangulis AHB basim communem AB , verticesque H in circumferentia habentibus, triangulum ACB esse minimum, cum punctum C est in circumferentia convexa, maximum, cum in circumferentia concava.

Dem. Ad punctum enim K , ubi BH secatur a contingente IL , ducta AK , liquet, triangulum $AKB = ACB < AHB$ in Fig. 67. majus verò in Fig. 68. Q. E. D.

THEOREMA V.

127. Si triangulo quovis isoscele BAC (Fig. 69. 70.) circulo BAE inscripto, ex ejus vertice A ducantur AD , AE , a quarum altera AD secetur basis BC in D , ab altera vero AE circumferentia in E , ita ut anguli BAD , CAE sint aequales, & sic semper; dico, inter omnia aggregata $AD + AE$, aggregatum $AB + AC$ esse minimum, etiam cum AD , AE in unam rectam, ut AH , AI coeunt.

Dem. Juncta CE , triangula ABD , CAE erunt similia, anguli enim ABD , AEC sunt aequales, quippe qui eisdem arcui AC in Fig. 69. insistant, & in Fig. 70. sunt complementa ad duos rectos ejusdem anguli ABC ; unde elicitur $AB : AD = AE : AC$, adeoque $AB \cdot AC = AD \cdot AE$; sed latera AB , AC ponuntur aequalia; ergo $AB + AC < AD + AE$ (47.); quod erat primum.

Juncta IC, ob triangula familia AIC, ABH, habemus $AB : AH = AI : AC$, quare $AB \cdot AC = AH \cdot AI$, ac proinde $AB + AC < AH + AI$; quod erat secundum.

THEOREMA VI.

128. Ex omnibus triangulis intra circulare segmentum constitutis, isosceles maxima cum area, tum perimetro, nec non maximo crurum rectangulo gaudet.

Dem. Triangula ABC, DBC (Fig. 71.) intra segmentum circulare BADC constituta, eidem basi BC insistant, angulosque BAC, BDC aequales habent. Ergo ex dictis (14.) res patet.

COROLLARIUM

129. Semicirculi AFD (Fig. 72.) radio CA indefinite versus N protracto, in aliquo ejus puncto H formetur angulus quilibet CHB, cujus crus HB occurrat circumferentiae in B, tum sumpto alio puncto E, agatur EF ipsi HB parallela occurrens circumferentiae in F, & ita porro. Ex triangulis hinc genitis CHB, CEF haberi potest illud, cujus tam area, quam perimeter sit maxima. Per tria enim puncta B, C, H fac, ut transeat circulus, intra quem in chorda CB constitutur triangulum isosceles; hujus crus alterutrum, puta CE, aptetur radio CA producto, incipiendo a centro C. Centro E, intervallo EC describe arcum, qui secet semicirculum AFD in puncto F, & duc FE. Triangulum CEF, & aggregatum $CE + EF$ erunt maxima, nam triangula BHC, CEF sunt angulis verticalibus, nec non basibus aequalibus praedita. Quod si agas indefinitam CM, quae cum CN faciat angulum MCN dimidium anguli CEF, producasque BH, FE usque ad occursum ipsius CM; inter omnes BM erit FL maxima propter triangula isoscelia CHM, CEL. Quin etiam quum triangula BCM, FCL angulos M, L habeant aequales, & basibus aequalibus CB, CF insistant, si reperiat ut supra triangulum isosceles BCM, hoc omnium CFL erit maximum. SCHOL.

SCHOLIUM.

130. Interim est animadvertendum, 1. si ducas CK alterutri HB, EF parallelam, punctum K in circumferentia limitem alterum constituere, quem parallelae HB, EF attingere nequeunt. 2. trianguli maximi verticem nec in medio radij AC, nec ultra versus centrum C cadere posse, secus arcus CF circumferentiam AFD nusquam fecaret. 3. in quadrante ABPC triangulum rectangulum BRC, vel BCT esse *maximum*, ac *maximam* habere perimetrum, si fuerit BR = RC, vel BT = TC; adeoque 4. quadratum esse *maximum* parallelogrammum quadranti inscriptum, *maximaque* affici perimetro. 5. triangulum isosceles BCS, cujus angulus BCS sit rectus, esse in semicirculo prae reliquis vertices in centro habentibus *maximum*; quapropter 6. rectangulum RS ex duobus quadratis maximis duobus quadrantibus APC, CPD inscriptis conflatum, esse *maximum* parallelogrammum semicirculo inscriptum, ac *maxima* cingi perimetro; denique quadratum esse *maximum* parallelogrammum circulo inscriptum, & *maxima* perimetro circumdari.

THEOREMA VII.

131. Intra segmentum circulare ADCB (Fig. 73.) ductis chordis omnibus AC, CB; AD, DB, si fiat DE multiplex rectae DB, ut assumpta fuit CF multiplex CB (hoc est si accipiat $DE = mDB$, $CF = mCB$, & ita semper), ac per puncta A, F, B describatur circulus ABFE; recta AE per hujus circuli centrum & traducta, & circumferentiam ADCB secans in puncto D determinabit aggregatum $AD + mDB$, quod omnium aggregatorum $AC + mCB$ erit maximum.

Dem. Ductis enim EB, FB; quoniam in triangulis EBD, FBC anguli EDB, FCB sunt aequales, & latera ED, DB lateribus FC, CB proportionalia, anguli AEB, AFB erunt & ipsi aequales, ac proinde puncta quaecumque F erunt simul

simul cum puncto E in eadem circumferentia $ABFE$. Sed diameter AE est omnium chordarum AF maxima; ergo &c.

S C H O L I U M

132. Quo plus $DE > DB$, pariterque $CF > CB$, eo magis anguli AEB , AFB acutiores redduntur, adeoque circulus $ABFE$ major fit, quo in casu centrum G magis recedit a dato arcu ADB ; quare posito hoc arcu semicircumferentia minore, quando punctum, seu centrum istud G ascendens per KH (quae arcus dati chordam AB bisariam, & normaliter secat) ad H pervenerit, ita ut juncta HA dicti arcus tangens evadat, methodus allata deficit, & idcirco tunc tantummodo Theorema est possibile, cum centrum circuli describendi $ABFE$ jacet inter punctum H , per quod transit tangens AH , & arcus dati dimidium I . Si verò arcus ADB sit semicircumferentiae aequalis, constat, tangentem HA fore normalem diametro AB , quae chordae vices subit, quapropter haec tangens secare nunquam poterit KG , cui est parallela; quum igitur hoc in casu nulla HA fieri possit tangens in A , Theorema semper erit possibile. Itidem semper erit possibile, si datus arcus sit semicircumferentia major, quia tangens in A a recta KG semper divergit. Si quis DE rectae DB , pariterque CF rectae CB submultiplicem facere cuperet, observet, punctum G tunc cadere inter puncta I, K , quia existente $CF = CB$, centrum G cadit in arcus dati dimidium I ; quare juncta GA , nulla circumferentiae daretur intersectio, adeoque Theorema foret impossibile. Quae omnia erant sedulò determinanda.

T H E O R E M A VIII.

133. Ex triangulis omnibus, quae circulo inscribi possunt, aequilaterum maxima area, & maxima praeditum est perimetro.

Dem.

Dem. Sint triangulum aequilaterum ABC (*Fig. 74.*), & alia quaelibet triangula ADE, AFG tam supra, quam infra basim BC circulo ADME inscripta. Junctis BG, BE, & ex chordae AE dimidio H excitata ad circumferentiam normali HI, ex punctis B, D demittantur ad AE normales BK, DL Quoniam $AE < AC$, adeoque arcus ADME $>$ arcu ADC, punctum I (dimidium arcus ADME) erit infra punctum B. Itaque propter $BK > DL$, triangulum ABE majorem aream, majoremque habebit perimetrum quam triangulum ADE (:5.). Idem ostendetur de triangulo ABG comparate ad triangulum AFG. Sed triangulum aequilaterum ABC majorem habet aream, majoremque perimetrum quam singula ABE, ABG (128.); ergo &c.

COROLLARIUM I.

134. Quum portio MN, a basi BC trianguli aequilateri ABC resecta, sit quarta pars diametri AM, liquet, rectangulum ANC, quod in semicirculo AEM fit ab $AN = \frac{3}{4} AM$ ducta in normalem NC ex puncto N usque ad circumferentiam excitatam, esse *maximum*.

COROLLARIUM II.

135. Circa trianguli cujuslibet ABC (*Fig. 75.*) basim BC descripto semicirculo BFC, si ex portionis $BE = \frac{1}{4} BC$ puncto E erigatur ad circumferentiam normalis EF, atque ad trianguli latus AC ducatur ED alteri lateri AB parallela, rectangulum DEF erit *maximum* omnium GHI, quae simili ratione haberi possunt; sunt enim DE, GH portionibus EC, HC proportionales.

COROLLARIUM III.

136. Datis quibuscumque polygonis regularibus, in quibus latera sint in progressionem 6, 12, 24, 48, &c. inter omnia triangula, quae ipsis inscribi possunt, aequilaterum,
cujus

cujus vertex in aliquo eorum angulo existit, *maximam* habet cum aream, tum perimetrum; reliqua enim trian- gula vel sunt eidem circulo cum dictis polygonis inscri- ptibilia, vel triangulis circulo inscriptibilibus minora.

T H E O R E M A IX.

137. In circulis ACBE, ACFD (Fig. 76.) se invicem intersecantibus in punctis A, C agantur per punctum C quotlibet rectae BD, EF circumferentiis utrinque termi- natae, & connectantur AB, AC, AD, AE, AF, ut exur- gant triangu- la ABD, AEF; ajo in triangulo ABD, cujus basi BD est AC normalis, altitudinem AC esse maximam, maximam basim BD, & maximam cum aream, tum peri- metrum.

Dem. Demittatur ex puncto A ad trianguli AEF basim EF normalis AH; patet, in triangulo rectangulo AHC semper esse $AC > AH$; quod erat primum.

Ob angulos ABC, AEC aequales, nec non ob angulos aequa- les ADC, AFC, triangu- la ABD, AEF sunt similia; sed altitu- do AC major altitudine AH; ergo basis BD major basi EF, adeoque triangulum ABD majus triangulo AEF; quod erat secundum, & tertium.

Quoniam anguli ACB, ACD sunt (per hyp.) recti, erunt AB, AD diametri circulorum ACBE, ACFD; quare $AB + AD > AE + AF$. Sed (per dem.) $BD > EF$; ergo triangu- li ABD perimenter est major perimetro trianguli AEF; quod erat quartum.

T H E O R E M A X.

138. Sumptis in rectae AB (Fig. 77.) dimidia AG quotlibet centris K, L, radiis KA, LA describantur se- micirculi AHD, AIF, tum ductis ex puncto B contingen- tibus BH, BI, junctisque KH, LI; si AD fuerit dupla remanentis DB; ajo, inter omnia triangu- la KHB, LIB triangulum KHB esse maximum.

Dem. Descripto circa diametrum AB semicirculo ACB,
ex

ex punctis D, F excitentur ad ejus circumferentiam normales DC, FE, junganturque BC, BE. Quoniam BK + KH = BL + LI, & triangula KHB, LIB sunt rectangula, erunt etiam triangula isoscelia isoperimetra dimidiata, inter quae BHK, ob KB = 2HK erit dimidium trianguli aequilateri. Sed ex universis triangulis isoperimetris aequilaterum est maximum (12.); ergo &c.

COROLLARIUM

139. Ob eandem rationem si ex punctis D, F circulis AHD, AIF (Fig. 78.) applicentur DH, FI, ita ut sit DH = DB, FI = FB, ac deinde connectantur AH, AI; omnium triangulorum rectangulorum AHD, AIF triangulum AHD in circulo, cujus diameter AD est dupla remanentis DB, constat, esse *maximum*.

THEOREMA XI.

140. Stantibus iisdem quae in Theorem. antec. (138.) & eadem servata constructione; dico, in circulo ACB (Fig. 77.) rectangulum AD.BC esse omnium AF.BE maximum.

Dem. Quoniam $AB \cdot BD = \overline{BC}^2 = \overline{BH}^2$; $AB \cdot BF = \overline{BE}^2 = \overline{BI}^2$; erunt $BC = BH$, $BE = BI$. Sed $KH \cdot BH > LI \cdot BI$ (138.), seu $AD \cdot BH > AF \cdot BI$; ergo $AD \cdot BC > AF \cdot BE$, & ita semper. Q. E. D.

COROLLARIUM I.

141. Connexis AC, AE; quum sit AD.BC, ut AB. AD.BC, nimirum ut $\overline{AC}^2 \cdot CB$, erit quoque $\overline{AC}^2 \cdot CB$ *maximum*. Quia vero $\overline{AC}^2 : \overline{CB}^2 = \overline{AD}^2 : \overline{DC}^2 = AD : DB = 2 : 1$, sumpta AC pro altitudine, CB pro basi, trianguli ACB altitudo baseos duplum potest. Quamobrem ex omnibus triangulis rectangulis eandem hypotenusam habentibus, illud, cujus

ius altitudo baseos duplum potest, *maximo* gaudet producto, quod oritur altitudinis quadratum per basim multiplicando.

COROLLARIUM II.

142. Triangula ACD, CDB, itidemque AEF, EFB sunt similia; ergo $AD \cdot BC = AC \cdot CD$, $AF \cdot BE = AE \cdot EF$. Sed $AD \cdot BC > AF \cdot BE$ (140.); ergo $AC \cdot CD > AE \cdot EF$. Et

hic etiam propter $\overline{AD}^2 : \overline{DC}^2 = AD : DB = 2 : 1$, constat, triangulum ADC habere altitudinem AD, quae baseos DC duplum potest. Praeterea quia $AC \cdot CD > AE \cdot EF$, erit quoque $2AC \cdot 2CD > 2AE \cdot 2EF$; omnia vero triangula, quae circulo inscripta eidem chordae insistant, perimetrum habent singula perimetro trianguli isoscelis minorem (128.); ergo ex universis triangulis, quae circulo eidem inscribi possunt, isosceles illud, cuius basis duplum potest altitudinis, *maximo* pollet rectangulo, quod fit basim per crurum aggregatum multiplicando. Et vicissim inter omnes circulos triangulis universis rectangula ex basibus in crurum aggregata aequalia habentibus circumscriptos; ille, qui triangulo isosceli, in quo basis duplum potest altitudinis, circumscribitur, est *minimus*.

THEOREMA XII.

143. Si recta AB (Fig. 77.) ita dividatur in D, ut altera ejus portio AD sit alterius DB dupla; ajo, factum ex quadrato duplae portionis in reliquam emergens fore maximum factorum omnium ex quadrato cujusvis alius ejusdem AB portionis AF in reliquam FB prodeuntium.

Dem. Eadem figurae constructione servata; quoniam $AD \cdot BC > AF \cdot BE$ (140.) erit $AD : AF > BE : BC$, pariterque $\overline{AD}^2 : \overline{AF}^2 > \overline{BE}^2 : \overline{BC}^2$; seu $\overline{AD}^2 : \overline{AF}^2 > FB : DB$; ergo AD.

$$\overline{AD}^2 \cdot DB > \overline{AF}^2 \cdot FB. \text{ Q. E. D.}$$

COROLLARIUM I.

144. Productum $\overline{AD}^2 \cdot DB = AD \cdot AD \cdot DB = AD \cdot \overline{DC}^2$;
ergo $AD \cdot \overline{DC}^2$ est *maximum*; hoc est ex omnibus trian-
gulis semicirculo inscriptis, illud, cujus altitudo baseos
duplum potest, *maximum* habet productum ex baseos qua-
drato in altitudinem.

COROLLARIUM II.

145. In trianguli ABR (Fig. 78.) latere aliquo AB
sumpta $AD = \frac{2}{3} AB$, tum ex D, & ex alio quovis puncto
P ductis DM, PN lateri AR parallelis; erit $\overline{AD}^2 \cdot DM >$
 $\overline{AP}^2 \cdot PN$, est enim $DB : PB = DM : PN$.

COROLLARIUM III.

146. Si triangulum rectangulum ANC (Fig. 74.) semi-
circulo AGM inscriptum ponatur aequilaterum dimidia-
tum, erit $AC = 2CN$; sed $AC \dagger CN > AE \dagger EP$ (133.);
ergo multo magis $\overline{AC}^2 \cdot CN > \overline{AE}^2 \cdot EP$; quare ex trian-
gulis universis, quae eidem circulo inscribi possunt, ae-
quilaterum *maximo* gaudet producto, quod oritur tria
ejusdem latera inter se multiplicando; & vicissim inter
universa triangula, in quibus vel areae, vel perimetri,
vel producta ex lateribus inter se multiplicatis aequan-
tur, aequilaterum *minimo* circulo inscribitur.

THEOREMA XIII.

147. Si in semicirculi AMF (Fig. 78.) diametro AF

sumatur $AD = \frac{5}{6} AF$, ac postmodum ad circumferentiam

excitetur normalis DM ; ajo, productum $\overline{AD}^2 \cdot DM$ esse maximum.

Dem. Ducta in puncto M tangente BM occurrente diametro AF in B , & huic normali AR in R , agatur radius QM ; erit $\overline{DM} = AD \cdot DF = QD \cdot DB$ ob triangulum rectangulum QMB ; unde $AD : DB = QD : DF = 2 : 1$; ergo in triangulo ABR ducta ipsi DM quavis parallela PN ,

quae secabit circumferentiam in I , fiet $\overline{AD}^2 \cdot DM > \overline{AP}^2 \cdot PN$ (145.), ac potiori jure $\overline{AD}^2 \cdot DM > \overline{AP}^2 \cdot PI$. Q. E. D.

THEOREMA XIV.

148. Si in quadrantis $FMSQ$ (Fig. 78.) radio QF abscindatur QD , ita ut sit $\overline{QD} = \frac{2}{3} \overline{QF}$, & reliqua ut in praecedenti constructione peragantur; dico, productum $\overline{QD} \cdot DM$ esse maximum.

Dem. Quoniam $\overline{DM} = \overline{FQ} - \overline{DQ} = \overline{FQ} - \frac{2}{3} \overline{FQ} = \frac{1}{3} \overline{FQ}$ & valet analogia $\overline{QD} : \overline{DM} = \overline{DM} : \overline{DB}$; substituendo, stabit $\frac{2}{3} \overline{FQ} : \frac{1}{3} \overline{FQ} = \frac{1}{3} \overline{FQ} : \overline{DB} = \frac{1}{6} \overline{FQ}$. sed $\overline{QD} = \frac{2}{3} \overline{FQ} = \frac{4}{6} \overline{FQ}$; ergo $\overline{QD} : \overline{DB} = \frac{4}{6} \overline{FQ} : \frac{1}{6} \overline{FQ} = 4 : 1$; quocirca etiam $QD : DB = 2 : 1$, adeoque $\overline{QD} \cdot DM > \overline{QP}^2 \cdot PN$ (145.), ac multo magis $\overline{QD} \cdot DM > \overline{QP}^2 \cdot PI$. Q. E. D.

COROLLARIUM

149. Sumpta in diametro AF aequaliter hinc inde a centro Q tam $\overline{QD}^2$, quam $\overline{QY}^2 = \frac{2}{3} \overline{QF}^2$, sive $\overline{YD}^2 = \frac{2}{3} \overline{AF}^2$, & completo rectangulo YM; inter omnia rectangula semicirculo ASF inscripta, rectangulum YM habebit productum MD. $\overline{DY}^2$ maximum.

THEOREMA XV.

150. Si in quadrante FMSQ (Fig. 78.) radius QF ita secetur in D ut sit $\overline{QD}^2 = \frac{1}{3} \overline{QF}^2$; erecta ad circumferentiam normali DM, ajo, productum $\overline{MD}^2 \cdot DQ$ esse maximum.

Dem. Quoniam posita $\overline{QV}^2 = \frac{2}{3} \overline{QS}^2$, productum $\overline{QV}^2 \cdot VZ$ est maximum (148.), ducta ZX ipsi QS parallela, erit quoque maximum productum $\overline{ZX}^2 \cdot XQ$. Sed ducto radio QZ, habemus $\overline{QZ}^2 = \overline{ZX}^2 + \overline{XQ}^2$, hoc est $\overline{QF}^2 = \overline{QV}^2 + \overline{QX}^2$, seu $\overline{QF}^2 = \frac{2}{3} \overline{QF}^2 + \overline{QX}^2$; ergo $\overline{QX}^2 = \frac{1}{3} \overline{QF}^2$. At (per hyp.) $\overline{QD}^2 = \frac{1}{3} \overline{QF}^2$; ergo puncta X, D, nec non Z, M coincidunt, & $\overline{MD}^2 \cdot DQ$ est maximum. Q. E. D.

COROLLARIUM

151. In diametro AF sectis utrinque a centro Q tam $\overline{QD}^2$, quam $\overline{QY}^2 = \frac{1}{3} \overline{QF}^2$, sive $\overline{YD}^2 = \frac{1}{3} \overline{AF}^2$, completoque rectangulo YM; ex omnibus rectangulis semicirculo ASF
E inscri-

inſcriptis, reſtangulum YM habebit productum $\overline{MD}^2 \cdot \overline{DY}$ maximum.

T H E O R E M A XVI.

152. Ex omnibus triangulis iſoſceliis ABC, DEF (Fig. 79. 80.) producta aggregati crurum in baſim aequalia habentibus, nimirum $2AB \cdot BC = 2DE \cdot EF$, ſeu $AB \cdot BG = DE \cdot EH$; illud ABC, cujus baſis BC duplum poteſt al-

titudinis AG, maximum habet productum $\overline{BC}^2 \cdot AG$, quod oritur multiplicando baſeos quadratum per altitudinem.

Dem. Triangulis hiſce circumſcribantur circuli, quorum diametri AI, DL. Quoniam $AB \cdot BG = DE \cdot EH$, ſta-

bit $BG : EH = DE : AB$, pariterque $\overline{BG}^2 : \overline{EH}^2 = \overline{DE}^2 : \overline{AB}^2$,

ſive ex natura circuli $\overline{BG}^2 : \overline{EH}^2 = LD \cdot DH : IA \cdot AG$; & ducendo antecedentes in AG, & conſequentes in DH,

ſiet $AG \cdot \overline{GB}^2 : DH \cdot \overline{HE}^2 = LD \cdot DH \cdot AG : IA \cdot AG \cdot DH =$

$DL : AI$; ſed $DL > AI$ (142.); ergo etiam $AG \cdot \overline{GB}^2 >$

$DH \cdot \overline{HE}^2$; Q. E. D.

C O R O L L A R I U M I.

153. Ex omnibus triangulis iſoſceliis producta, quae oriuntur multiplicando baſium quadrata per altitudines, aequalia habentibus; illud, cujus baſis duplum poteſt altitudinis, minimum poſſidet productum baſeos per crurum aggregatum, ſeu baſeos dimidiaae per crus alterum multiplicatae.

C O R O L L A R I U M II.

154. Demiſſis ex punctis G, H in latera AB, DE nor-

ma-

malibus GM, HN, erit $AG \cdot GB = AB \cdot GM$, $DH \cdot HE =$

$DE \cdot HN$, quare $AG \cdot \overline{GB}^2 : DH \cdot \overline{HE}^2 = AB \cdot BG \cdot GM : DE \cdot EH \cdot HN$; sed (*per hyp.*) $AB \cdot BG = DE \cdot EH$; ergo $AG \cdot$

$\overline{GB}^2 : DH \cdot \overline{HE}^2 = GM : HN$. Est autem $AG \cdot \overline{GB}^2 > DH \cdot$

$\overline{HE}^2$; ergo $GM > HN$; hoc est si ex angulis rectis triangulorum omnium rectangulorum, in quibus producta ex hypotenusa in bases sint aequalia, demittantur normales super ipsas hypotenusas, normalis in illo triangulo, cujus altitudo baseos duplum potest, erit *maxima*, adeoque *maximus* quadrans circularis ipsi triangulo inscribetur. Et vicissim si normales ex quorumcumque triangulorum rectangulorum angulis rectis super hypotenusas demissae sint aequales, triangulum illud, cujus altitudo baseos duplum potest, *minimum* habebit productum ex hypotenusa in dictam basim.

THEOREMA XVII.

155. *Inter omnia triangula aequae alta circulo circumscripta, isosceles cum area, tum perimetro minima afficitur.*

Dem. Circulo MN (*Fig. 81.*) circumscribantur triangulum isosceles ABC, & aliud quodvis aequae altum DEF, ductaque BH parallela, & aequali lateri ED, jungatur HC. Quoniam triangula ABC, HBC in eadem basi, & inter easdem parallelas constituuntur, isosceles ABC minori cingitur perimetro quam HBC (1.), ac proinde circulus triangulo HBC inscriptus minor erit circulo MN. Ergo si stante latere BH, latera HC, HB, & BC tangere debeant (servata figura triangulari) circulum circulo MN aequalem, oportet, ut fixa manente extremitate H, latus HC ab HB magis recedat, & evadat HK lateri DF aequale, ac parallelum; sed tunc, ob triangula DEF, HBI aequalia, & similia, fit BI, seu EF > BC; ergo triang. ABC < DEF; quod erat primum.

Secundum patet etiam ex eo quod quum triangulum ABC perimetrum habeat minorem triangulo HBC, potiori jure *minorem* perimetrum habere debet triangulo HBI, seu DEF.

COROLLARIUM

156. Inter omnes circulos triangulis tam aequalibus, quam isoperimetris, utrisque aequae altis, inscriptos, ille qui triangulo isoscelio inscribitur, est *maximus*.

THEOREMA XVIII.

157. Ex triangulis omnibus, quae circulo circumscribi possunt, aequilaterum minima area, minimaque praeditum est perimetro.

Dem. Esto ABC (Fig. 82.) dimidium trianguli aequilateri, DEC dimidium trianguli isoscelis, utrumque circulo LC circa eandem altitudinem AC circumscriptum, ac vertex D statuatur infra verticem A. Ducta BM parallela ipsi AC, quoniam latus AB tangit circulum in sui dimidio K, & latus DE eum tangit ultra K in L, rectarum AB, DE intersectio I erit ultra punctum K, quare quum sit $AI < IB$, adeoque $DI < IM$, triangulum ADI minus erit simili BMI, ac minus potiori jure triangulo BIE, positoque communi trapetio DIBC, erit triangulum ABC $<$ CDE. Eodem modo, ducta AN parallela basi BH, ostendetur, triangulum aequilaterum AHC minus esse triangulo isoscele GFC, cujus vertex G sit ultra verticem A. Sed triangula DEC, GFC sunt singula minora ceteris triangulis sub iisdem altitudinibus circulo circumscriptis (155.); ergo *patet primum*.

In ejusmodi autem triangulis perimetri sunt ut areae; ergo *patet secundum*.

COROLLARIUM

158. Igitur inter omnia triangula, quorum areae sunt ut perimetri, aequilaterum cum aream, tum perimetrum *minimam* habet.

THEO.

T H E O R E M A XIX.

159. *Ex omnibus triangulis aequae altis segmento circulari circumscriptis, isosceles minimam cum aream, tum perimetrum habet.*

Dem. Segmento circulari PMT (Fig. 83.) sub eadem altitudine AR, sive DS circumscripta concipiantur triangula ABC, DEF, quorum prius ABC fit isosceles. Per huius trianguli ABC contactus G, I traducatur recta GI usque ad occursum laterum DE, DF trianguli DEF in punctis L, K. Quoniam lateris DE contactus est supra punctum G, & lateris alterius DF contactus est infra punctum I, erit $GI < LK$. Jam vero quum LK sit parallela EC, stabit $GI : BC = AN : AR = DI : DS = LK : EF$; quare permutando, $GI : LK = BC : EF$; sed $GI < LK$; ergo $BC < EF$, adeoque triang. $ABC < DEF$; quod erat primum.

Si trianguli DEF foret basis $EF = BC$, triangulum ABC minorem ipso haberet perimetrum (1.); ergo potiori jure minorem habebit perimetrum quam DEF, si huius basis $EF > BC$; quod erat secundum.

T H E O R E M A XVIII.

160. *Ex triangulis omnibus, quae segmento cuilibet circulari circumscribi possunt, isosceles illud, cujus crura dictum segmentum suis dimidiis tangunt, est minimum.*

Dem. Segmento circulari PMT (Fig. 84.) sint circumscripta triangula isoscelia ABC, DEC, GIC (dimidia pro integris expono), & trianguli integri ABH crura AB, AH segmenti circumferentiam tangant suis dimidiis K, L. Eadem methodo qua paulo ante usi fuimus (153.), demonstrabitur, triangulum ABC minus esse singulis triangulis DEC, GIC. Sed ex omnibus triangulis aequae altis segmento circulari circumscriptis isosceles est minimum (159.); ergo &c.

COROLLARIUM I.

161. Ex omnibus triangulis, quae semicirculo circumscribi possunt, rectangulum est *minimum*, adeoque inter omnia parallelogramma circulo circumscripta quadratum est *minimum*.

COROLLARIUM II.

162. Ex omnibus parallelogrammis, quae duobus circuli segmentis aequalibus eandem chordam communem habentibus circumscribi possunt, rhombus ille, cujus latera circumferentias suis dimidiis tangunt, est *minimus*.

L E M M A.

163. Sint triangula isoscelia aequalia ABD, FGI (Fig. 85. 86.) circa communem altitudinem AC, quorum ABD sit aequilaterum; secta AB bifariam in E, dico, latus alterum GF trianguli FGI secare AB infra punctum E, si F sit citra punctum A, ut in Fig. 85. & supra, si F sit ultra A, ut in Fig. 86.

Dem. Si negas; crus GF transeat per E dimidium cruris AB, & ex puncto A ducatur AH parallela BD occurrens in H cruri GF. Triangula similia GEB, AEH erunt etiam aequalia; sed triangula quoque ABC, FGC sunt (*ex hyp.*) aequalia; ergo ablato communi trapetio FEBC in Fig. 85, & AEGC in Fig. 86, triangulum GEB erit aequale triangulo AFE; sed triang. GEB = AEH (*per dem.*); ergo triang. AFE = AEH, quod est absurdum.

Idem, ceteris stantibus, facilius demonstrabitur, si crus GF transeat supra punctum E in Fig. 85. & infra in Fig. 86. ut est perspicuum; ergo &c.

T H E O R E M A XIX.

164. Inter omnes circulos triangulis universis aequalibus inscriptos; ille, qui triangulo aequilatero inscribitur, est *maximus*.

Dem.

Dem. sint duo triangula isoscelia aequalia ABD, FGI (*Fig. 87. 88.*), quorum alterum ABD sit aequilaterum, utraque vero circa communem altitudinem AC constituta, ut in figuris; iisque inscripti concipiantur circuli CEK, CMN, quorum centra, H, L in communi altitudine AC, & contactuum puncta, E, K, M, N. Quoniam crura FG, FI secant alia crura AB, AD infra eorum dimidia E, K five infra circuli CEK contactus, ut in *Fig. 87.* & supra, ut in *Fig. 88.* (163.), puncta M, N erunt necessario intra triangulum ABD; quare circulus per puncta M, C, N transiens circulo per puncta C, E, K transeunte continebitur, adeoque illo *minor* erit, & ita semper. Sed si unicuique triangulo isosceli triangulum quodvis scalenum aequale sub eadem altitudine construatur, circulus triangulo isosceli inscriptus erit maximus (156.); ergo &c.

COROLLARIUM I.

165. Ex hoc Theoremate, quae jam demonstravimus (9. & 12.) confirmantur; nam ob aequalia triangula ABD, FGI, erit radius LC ad radium HC, ut trianguli ABD perimenter ad perimetrum trianguli FGI. Sed $LC < HC$, & hoc semper; ergo trianguli aequilateri perimenter erit semper *minor* perimetro cujuslibet trianguli ipsi aequalis, &c.

COROLLARIUM II.

166. Itidem quum inter omnia triangula isoperimetra aequilaterum sit maximum (165.); sequitur, inter omnes circulos triangulis universis isoperimetris inscriptos, illum, qui triangulo aequilatero inscribitur, esse *maximum* (156.).

THEOREMA XX.

167. Ex universis triangulis aequalibus, aequilaterum minimo afficitur producto, quod oritur tria singulorum hujusmodi triangulorum latera inter se multiplicando.

E 4

Dem.

Dem. Triangulis isosceliis aequalibus ABC , DEF (*Fig.* 79. 80.), quorum ABC aequilaterum, circuli $ABIC$, $DELF$ circumscribantur. Actis diametris AI , DL , ex natura circuli stabit $AB.AC.BC : DE.DF.EF = AI.AG.BC : DL.DH.EF$; sed (*per hyp.*) $AG.BC = DH.EF$; ergo $AB.AC.BC : DE.DF.EF = AI : DL$; sed AI est minima omnium DL (146.); ergo productum $AB.AC.BC$ est omnium productorum $DE.DF.EF$ *minimum*. Jam vero si supra trianguli isoscelis DEF basim EF constituatur aliud triangulum ipsi aequale, majorem hoc habebit perimetrum (7); ergo &c.

COROLLARIUM I.

168. Ex omnibus triangulis, in quibus facta, quae producant tria singulorum latera inter se multiplicando, sunt invicem aequalia, aequilaterum est *maximum*; quod etiam directe ostendi potest; si enim triangulis ABC , DEF circuli $ABIC$, $DELF$ circumscribantur, quia (*per hyp.*) $AI.AG.BC = DL.DH.EF$, stabit $AG.BC : DH.EF = DL : AI$; at semper est $DL > AI$ (146.); ergo &c.

COROLLARIUM II.

169. Ex omnibus triangulis circulo circumscriptis, aequilaterum *minimum* habet productum, quod fit tria singuli cujuscumque latera invicem multiplicando; si enim cum omnia triangula sunt aequalia id accidit, idem multo magis accidere debet cum triangulum aequilaterum est, ut vidimus (157.), ceterorum minimum. Et vicissim inter omnes circulos inscriptos triangulis aequalia habentibus producta, quae ex tribus singulorum lateribus invicem multiplicatis oriuntur; ille, qui triangulo aequilatero inscribitur, est *maximus*.

THEOREMA XXI.

170. Ex universis triangulis isoperimetris, aequilaterum

rum maximo pollet producto, quod oritur tria singulorum hujusmodi triangulorum latera invicem multiplicando.

Dem. si triangulorum hujusmodi singulorum perimetri in totidem rectas disponantur, omnes istae rectae (*per hyp.*) aequales erunt. Sed in trianguli aequilateri perimetro subquadruplum facti ex quadrato duplae portionis in reliquam est semper maximum (143. 32.); ergo &c.

COROLLARIUM

171. Vicissim inter omnia triangula, in quibus producta ex tribus singulorum lateribus invicem multiplicatis aequantur, aequilaterum *minima* praeditum est perimetro.

LEMMA.

172. Si triangula isoscelia EBK, GHL (Fig. 89. 90.) circulo, cujus centrum C, circumscribantur; dico, esse

$$\overline{AB}^2 . AE : \overline{AH}^2 . AG = \overline{AE}^2 . FG : \overline{AG}^2 . FE .$$

Dem. super crura EB, GH demittantur normales CD, CI. Ob triangula similia ABE, CDE stabit $AB : CD = AE :$

ED, pariterque $\overline{AB}^2 : \overline{CD}^2 = \overline{AE}^2 : \overline{ED}^2 = \overline{AE}^2 : AE . EF$; ergo

$\overline{AB}^2 : \overline{CD}^2 = AE : EF$. Eadem plane ratione ex triangulis

similibus AHG, CIG colligitur $\overline{AH}^2 : \overline{CI}^2 = AG : GF$, & in-

vertendo, $\overline{CI}^2$, seu $\overline{CD}^2 : \overline{AH}^2 = GF : AG$. Itaque si duae

repertae analogiae $\overline{CD}^2 : \overline{AH}^2 = GF : AG$, $\overline{AB}^2 : \overline{CD}^2 = AE :$

EF invicem multiplicentur, prodibit $\overline{AB}^2 : \overline{AH}^2 = AE . GF :$

EF . AG, ductisque antecedentibus rationum in eandem

altitudinem AE, & consequentibus in eandem altitudi-

nem AG, orietur $\overline{AB}^2 . AE : \overline{AH}^2 . AG = \overline{AE}^2 . GF : \overline{AG}^2 . EF$;

Q. E. D.

THE.

THEOREMA XXII.

173. *Inter universa triangula circulo circumscripta, illud cujus altitudo duplam circuli inscripti diametrum adaequat, minimum habet productum ex baseos quadrato in altitudinem.*

Dem. Stantibus iisdem, quae in Lemmatis antecedentis (172.) figuris, sit primum $AG < AE$ (*Fig. 90.*). Quoniam $EF = FA$, erit $EF : FA < FA : FG$; & componendo, $EA : AF < AG : GF$; permutando, $EA : AG < AF : FG$. Sumpta igitur $AM = AG$, erit componendo, $ME : AG < AG : GF$; quare $ME \cdot GF < \overline{AG}^2$; hinc $ME \cdot GF \cdot EG < \overline{AG}^2 \cdot EG$; ex quo $ME \cdot EG : \overline{AG}^2 < EG : GF$; & componendo, $\overline{AE}^2 : \overline{AG}^2 < EF : GF$, adeoque $\overline{AE}^2 \cdot GF < \overline{AG}^2 \cdot EF$. Sed per Lemma antecedens (172.) est $\overline{AB}^2 \cdot AE : \overline{AH}^2 \cdot AG = \overline{AE}^2 \cdot GF : \overline{AG}^2 \cdot FE$; ergo $\overline{AB}^2 \cdot AE < \overline{AH}^2 \cdot AG$, seu $\overline{BK}^2 \cdot AE < \overline{HL}^2 \cdot AG$. Triangulum autem isosceles EBK minorem habet basim quam aliud quodvis triangulum aequae altum eidem circulo circumscriptum (155.); ergo patet primum.

Sit secundo $AG > AE$ (*Fig. 89.*). Ob $EF = FA$, erit $AG : AE > AF : FE$. Sume $AM = AE$, fiet componendo,

$MG : AE > AE : FE$, ac proinde $MG \cdot FE > \overline{AE}^2$, five

$MG \cdot FE \cdot GE > \overline{AE}^2 \cdot GE$, unde $MG \cdot GE : \overline{AE}^2 > GE : FE$; & componendo, $\overline{AG}^2 : \overline{AE}^2 > GF : EF$; hinc $\overline{AG}^2 \cdot EF > \overline{AE}^2 \cdot GF$. Sed vi Lemmatis $\overline{AG}^2 \cdot EF : \overline{AE}^2 \cdot GF = \overline{AH}^2 \cdot AG : \overline{AB}^2 \cdot AE$; ergo $\overline{AB}^2 \cdot AE < \overline{AH}^2 \cdot AG$, seu $\overline{BK}^2 \cdot AE < \overline{HL}^2 \cdot AG$.

AG. At id de quibusvis etiam triangulis aequae altis eidem circulo circumscriptis fit verum; ergo patet secundum.

COROLLARIUM I.

174. Quum fit $EF = FA$, si ponatur $FC = CD = 1$, erit $EC = 3$, $\overline{EC}^2 = \overline{ED}^2 + \overline{CD}^2 = 9$; sed $\overline{CD}^2 = 1$; ergo $\overline{ED}^2 = 8$, nempe $\overline{ED} : \overline{CD} = 8 : 1$. At $ED : CD = EA : AB$, itidemque $\overline{ED}^2 : \overline{CD}^2 = \overline{EA}^2 : \overline{AB}^2$; ergo $\overline{EA} : \overline{AB} = 8 : 1$, & $\overline{EA} : \overline{BK} = 8 : 4 = 2 : 1$; videlicet inter omnia triangula, quae circulo circumscribi possunt, illud, cujus altitudo baseos duplum potest, *minimum* habet productum ex baseos quadrato in altitudinem.

COROLLARIUM II.

175. Triangulorum circulo circumscriptorum areae sunt perimetris proportionales; quare inter universa triangula, quorum areae sunt ut perimetri, illud, cujus altitudo baseos duplum potest, *minimum* habet productum ex baseos quadrato in altitudinem, vel ex basi in totam perimetrum.

COROLLARIUM III.

176. Vicissim inter universa triangula, quibus invicem aequantur producta ex basium quadratis in altitudines, vel ex basibus in totas perimetros; illud, cujus altitudo baseos duplum potest, *maximum* circulum inscriptum habet; & circulus iste praeditus est diametro subduplo altitudinis dicti trianguli, cui inscribitur.

T H E O R E M A XXIII.

177. *Figurarum omnium rectilinearum ejusdem generis circulo inscriptarum illa maximam cum aream, tum perimetrum habet, quae est aequilatera, & aequiangulara.*

Dem. Finge, figurarum omnium rectilinearum, de quibus est quaestio, circulo ABD (*Fig. 91.*) inscriptarum maximam esse ABCDE, maximamque habere perimetrum; dico, hanc esse aequilateram, & aequiangularam. Si enim id neges, sit maxima alia figura BCDEF, cujus latera saltem duo FB, FE sint inaequalia; junctaque BE, construatur super hac triangulum isosceles ABE. Quum triangulum istud majorem triangulo FBE (128.) habeat cum aream, tum perimetrum, figura BCDEF non est illa, quae assertebatur, & ita semper, donec figura proposita evadat aequilatera. Sed figura aequilatera circulo inscripta est quoque necessario aequiangulara; ergo &c.

C O R O L L A R I U M

178. *Inter omnes circulos figuris omnibus rectilineis ejusdem generis tam aequalibus, quam isoperimetris circumscriptos; ille, qui figurae aequilaterae, & aequiangularae circumscribitur, est minimus.*

T H E O R E M A XXIV.

179. *Inter omnes circulos figuris omnibus rectilineis ejusdem generis aequalibus inscriptos, ille, qui figurae aequilaterae, & aequiangularae inscribitur, est maximus.*

Dem. Quoniam figurae rectilineae ejusdem generis ponuntur aequales, producta, quae sunt multiplicando circuli inscripti radium in talium figurarum semiperimetrum circumscriptam, sunt aequalia. Ergo ut unius figurae perimenter ad perimetrum alterius figurae ejusdem generis, ita erit radius circuli huic secundae inscripti ad radium
cir-

circuli primae pariter inscripti. Sed si prima figura sit aequilatera, & aequiangulara, minimam habebit perimetrum (64.); ergo quum radii circulorum inscriptorum sint perimetris figurarum, quibus inscribuntur, reciproci, figura aequilatera simul, & aequiangulara maximum habebit hujusmodi radium, adeoque circulus ipsi inscriptus erit reliquorum circulorum figuris ejusdem generis non aequilateris, & non aequiangularis inscriptorum *maximus*. Q. E. D.

T H E O R E M A XXV.

180. *Inter omnes circulos figuris omnibus rectilineis ejusdem generis isoperimetris inscriptos, ille, qui figurae aequilaterae, & aequiangularae inscribitur, est maximus.*

Dem. Quum perimetri ponantur aequales, figurae ejusdem generis, de quibus est quaestio, erunt ut radii circulorum iis inscriptorum; sed ex universis figuris rectilineis ejusdem generis isoperimetris aequilatera, & aequiangulara est maxima (63.); ergo radius circuli figurae hujusmodi aequilaterae, & aequiangularae inscripti erit maximus, ac proinde etiam circulus ipse. Q. E. D.

C O R O L L A R I U M

181. Ergo ex omnibus figuris rectilineis ejusdem generis, quae circulo circumscribi possunt, aequilatera, & aequiangulara est *minima* (179.) & *minima* cingitur perimetro (180.)

T H E O R E M A XXVI.

182. *Inter omnes circulos universis figuris rectilineis regularibus tam aequalibus, quam isoperimetris inscriptos, ille, qui triangulo inscribitur, est minimus.*

Dem.

Dem. Sint triangulum aequilaterum ABC (*Fig.* 57.58.), & polygonum quodvis regulare DEF ipsi aequale, iisque inscripti concipiantur circuli. Quoniam omnes ejusmodi figurae ponuntur aequales, radii circulorum iis inscriptorum per earum perimetros multiplicati producta aequalia efficient; ergo radij erunt perimetris istis reciproci. Sed inter omnes recensitas figuras triangulum aequilaterum maximam habet perimetrum (108.); ergo radius circuli eidem inscripti, adeoque ipse circulus erit *minimus*; quod erat primum.

Esto polygonum quodlibet regulare DEF triangulo aequilatero ABC isoperimetrum, iisque inscripti ponantur circuli. Triangulum ABC erit ad polygonum DEF , ut circuli triangulo inscripti radius ad radium circuli polygono inscripti. Sed ex universis figuris rectilineis regularibus isoperimetris triangulum est minimum (106.); ergo circuli triangulo ABC inscripti radius, adeoque circulus ipse erit *minimus*; quod erat secundum.

C O R O L L A R I U M

183. Si triangulo ablato, idem iteretur ratiocinium, quadrato minimus circulus continebitur, & sic deinceps; quamobrem inter omnes circulos figuris rectilineis regularibus tam aequalibus, quam isoperimetris inscriptos, ille qui figurae minori angulorum, vel laterum numero affectae inscribitur, est reliquis *minor*.

T H E O R E M A XXVII.

184. *Ex universis figuris rectilineis regularibus circulo circumscriptis, triangulum maxima cum area, tum perimetro pollet.*

Dem. Esto triangulum aequilaterum ABD (*Fig.* 87. circulo ECK circumscriptum. Sumpto in circumferenti inter contactus E, K quovis puncto O , per ipsum ducatur tangens LP cruribus AB, AD utrinque terminata. Quadrilaterum $BLPD$ minus erit triangulo ABD , minorem

remque habebit perimetrum, ut apertum est. Per aliam tangentem commutetur quadrilaterum BLPD in figuram quinque lateribus instructam; haec minori tam area, quam perimetro prae dicto quadrilatero donabitur, & ita porro. Sed ex omnibus figuris rectilineis ejusdem generis, quae circulo circumscribi possunt, aequilatera, & aequiangularia est minima, minimaque cingitur perimetro (181.); ergo potiori jure figura quaecumque ex regularibus, de quibus est quaestio, *minorem* triangulo aequilatero cum aream, tum perimetrum possidebit. Q. E. D.

COROLLARIUM

185. Ergo ex omnibus figuris rectilineis regularibus circulo circumscriptis, illa, quae minori angulorum, vel laterum numero constat, reliquis *majorem* habebit cum aream, tum perimetrum.

THEOREMA XXVIII.

186. *Ex universis figuris rectilineis regularibus circulo inscriptis, triangulum est minimum, ac minimam habet perimetrum.*

Dem. Circulo ABDE (Fig. 92.) inscriptum esto triangulum aequilaterum ABC, acceptoque infra basim BC in circumferentia BDC puncto quovis D, junge BD, CD. Patet, figuram quadrilateram ABDC esse triangulo ABC majorem, ac majori perimetro circumdari. Ultra crus alterum AC sume in circumferentia AEC punctum aliquod E, & junge AE, CE. Figura ABDCE quinque lateribus constans tam area, quam perimetro quadrilaterum ABDC superabit, & ita semper. Sed ex omnibus figuris rectilineis ejusdem generis circulo inscriptis, aequilatera, & aequiangularia est maxima, maximamque habet perimetrum (177.) ergo potiori jure figura quaecumque regularis circulo inscripta *major* tam area, quam perimetro semper erit triangulo aequilatero ibi pariter inscripto. Q. E. D.

Co-

COROLLARIUM I.

187. Ex omnibus ergo figuris rectilineis regularibus circulo inscriptis; illa, quae minori laterum, vel angulorum numero constat, reliquis erit *minor*, ac *minori* perimetro claudetur.

COROLLARIUM II.

188. Inter omnes circulos figuris universis rectilineis regularibus, quarum areae, vel perimetri sunt aequales, circumscriptos; ille, qui triangulo circumscribitur, est *maximus*.

THEOREMA XXIX.

189. Si data sint latera AB, BC, CD, DE (Fig. 93.) quae in extremitatibus connexa angulos quosvis ABC, BCD, CDE exterius prominentes ita consiciant, ut punctis extremis & liberis A, E junctis per AE spatium claudentem, polygonum $ABCDE$ oriatur; ajo, inter hujusmodi polygona illud esse maximum, per cujus puncta A, B, C, D, E transit semicirculus.

Dem. Si negas; ab extremitatibus A, E lateris AE spatium claudentis age ad omnes recensitos angulos rectas AC, AD, EB, EC novos angulos ABE, ACE, ADE efficientes. Quoniam per puncta A, B, C, D non transit semicirculus, aliquis ex angulis novissime nominatis non erit rectus. Talis ex. gr. non sit angulus ACE . Rectas $FH = AC$ (Fig. 94.), & $HK = CE$ ad angulum rectum FHK inclino, deinde super iisdem construo figuras FGH, HIK aequales, & similes figuris ABC, CDE . Liquet, polygonum $FGHIK$ majus esse poligono $ABCDE$ propter triangulum $FHK > ACE$ (39.), & ita semper, donec unusquisque ex omnibus angulis ABE, ACE, ADE rectus evadat. Sed tunc semicirculus per puncta A, B, C, D, E necessario transire debet; ergo &c:

Co.

COROLLARIUM

190. Quomocumque chordas easdem, quamvis inter se inaequales, in semicirculo disponere lubeat, perspicuum est, inscripti polygoni aream eandem permanere, ubicumque enim eadem chorda circulo applicetur, aequalem semper portionem circularem abscindet; quare polygonum semicirculo inscriptum *maius* semper erit quam aliud quodvis polygonum semicirculo non inscriptibile lateribus iisdem, diametro excepto, conflatum, & latere aliquo indeterminato clausum, quicumque sit ordo, quo istiusmodi latera disponantur.

THEOREMA XXX.

191. Polygonum circulo inscriptum est omnium polygonorum latera ipsi aequalia habentium, sed circulo non inscriptibilium maximum.

Dem. Sint polygonum ABCDEFA (*Fig. 95. 96.*) circulo inscriptum; & aliud polygonum GHILMNG ipsi aequilaterum, sed circulo non inscriptibile. Ducta diametro AP, iunge DP, EP; tum supra ML = ED constituto triangulo MQL simili, & aequali triangulo EPD, iunge GQ. Quoniam contingere potest, ut polygoni GHILQMNG pars altera tantum (puta GHILQG) sit semicirculo ABDP inscriptibilis, vel neutra; in primo casu pars altera (ex.gr. GQMNG) eidem circulo non erit (*per hyp.*) inscriptibilis, adeoque polygono APEFA minor (189.). In altero casu pars GQLIHG erit minor polygono ABCDPA, & pars GQMNG minor polygono APEFA (*l. cit.*); ergo totum polygonum ABCDPEFA maius erit toto polygono GHILQMNG. Aufer utrinque triangula aequalia DPE, LQM; remanebit polygonum ABCDEFA *maius* polygono GHILMNG Q. E. D.

COROLLARIUM

192. Si latera EP, PD sint reliquis lateribus singula singulis aequalia, polygonum ABCDPEF circulo inclusum erit aequilaterum, & aequiangulum, adeoque *maius* aequilatero quovis non aequiangulo ejusdem generis GHILQMN.

THEOREMA XXXI.

193. Si circuli circumferentia sit per puncta quotlibet A, B, D, E, F, G, H, I (Fig. 97.) secta in partes aequales, atque tam cum centro C, quam cum quovis alio puncto P ubicumque sumpto hujusmodi puncta connectantur; dico, rectarum CA, CB, CD, CE, CF, CG, CH, CI aggregatum prae quovis alio rectarum PA, PB, PD, PE, PF, PG, PH, PI, aggregato esse minimum.

Dem. Junctis enim AB, BD, DE, EF, FG, GH, HI, IA, fit polygonum regulare; quamobrem ex dictis (67.) res patet.

COROLLARIUM I.

194. Ergo si circuli circumferentia in portiones aequales summe exiguas resoluta concipiatur, ac postmodum ex centro C, & ex alio quovis puncto P ad ejusmodi laterculorum extremitates ponamus, rectas omnes duas esse; aggregatum innumerarum rectarum, quod fit a radijs, semper erit *minimum*.

COROLLARIUM II.

195. Quod de hujusmodi rectarum aggregatis monuimus (193. 194.), de quadratorum super easdem rectas constructorum aggregatis sentiendum est (101).

THEOREMA XXXII.

196. *Universarum figurarum rectilinearum cum regularium,*

larium, tum irregularium isoperimetrarum maxima, seu capacissima est, *circulus*.

Dem. Circulus est polygonum regulare innumeris summe exiguis constans laterculis; ergo quaecumque figura statuatur iisdem circuli lateribus conflata, dummodo non sit alter circulus, circulus erit ipsa semper *major* (191.). Si fingamus, polygonum quodvis regulare, vel irregulare circulo isoperimetrum, sed minori laterculorum numero cinctum, circulus erit illo semper *major* (107.). Si polygonum concipiatur circulo isoperimetrum aequali cum ipso laterum numero abundans, sed inaequalibus laterculis concinnatum, circulus erit illo semper *major* (63.). Si quis suspiceretur, circuli laterculis in portiones minores aequales abeuntibus, exurgere posse novum polygonum aequilaterum & aequiangulum, quod idcirco sit majus circulo, ex quo prodit (107.), pendat, polygonum istud esse necessario alium circulum, quapropter duo darentur circuli aequalem habentes perimetrum, quorum alter altero major esset, quod est absurdum. Tandem si quis imaginetur polygonum irregulare, vel irregulare circuli peripheriae isoperimetrum, sed angulis nunc exterius, nunc interius prominentibus constructum, manifestum est, polygonum istud alio polygono isoperimetro angulis omnibus exterius prominentibus (ut hujusmodi figurae fermè considerantur) praedito minus esse, adeoque potiori jure *minus* circulo isoperimetro. Ergo universum patet *Theorema*.

COROLLARIUM

197. Vicissim inter universas figuras rectilineas cum re-
gulares, tum irregulares aequales, circulus *minima* perimetra circumdatur.

SCHOLIUM

198. Quum figura quaevis curvilinea sit & ipsa instar circuli polygonum exilissimis, sed inaequalibus constans laterculis, addere potuissim, non dari figuram etiam

curvilineam, vel mixtilineam circulo isoperimetram, qua circulus non sit *major*; & vicissim non dari perimetrum etiam figurae curvilineae, aut mixtilineae circulo aequalis, qua circuli peripheria non sit *minor*; At ad Euclidis Geometrarum facile principis exemplum, non erat a figuris rectilineis, & circulo in re confimili recedendum.

THEOREMA XXXII.

199. Segmentorum circularium aequalibus circumferentiae portionibus praedictorum maximum est semicirculus.

Dem. Sint duo segmenta circularia $ABCA$, $DEFD$ (Fig. 98. 99.), in quibus circumferentiae portiones ABC , DEF aequantur, sitque $ABCA$ semicirculus. Supra chordam DE concipe constitutum aliud segmentum $DIFD$ aequale, ac simile segmento $DEFD$, compleaturque circulus $ABCH$. Liquet, circulum integrum, cujus segmentum $DEFD$, esse majorem circulo $ABCH$, adeoque latercula, quibus circumferentia DEF coalescit, esse majora laterculis, quibus constat circumferentia circuli $ABCH$, sunt enim circulorum latercula in ratione directa radiorum, ut in circulis concentricis ostendere facile est. Numerus igitur laterculorum in figura $DEFI$ erit minor numero laterculorum in circulo $ABCH$, quare circulus $ABCH$ erit major figura $DEFI$ (107.). Ergo ejus quoque dimidium, semicirculus nempe ABC , erit *major* dimidio figurae $DEFI$, hoc est segmento $DEFD$. Q. E. D.

COROLLARIUM

200. Vicissim ex omnibus segmentis circularibus aequalibus, *minima* semicirculus afficitur circumferentia.



DE MAXIMIS, ET MINIMIS

AD INSTITUTIONES GEOMETRICAS
ACCOMMODATIS

PARS SECUNDA

LIBER III.

De Solidis.

LEMMA

201. **S**uper eadem basi regulari BF (Fig. 100.) pari laterum numero praedita, sint prismata aequae alta AC, CI, quorum AC rectum; dico, ex parallelogrammis, queis prismatis obliqui CI superficies constat, alterutrum rectangulorum oppositorum aequalium BHIK, CFLG esse maximum; parallelogrammum BKGC in eodem plano cum rectangulo BCDE jacens esse minimum; ac cetera parallelogramma intermedia quo plus a rectangulo BHIK, vel CFLG recedunt, & ad parallelogrammum BKGC accedunt, gradatim imminui.

Dem. Rectangulum CFLG, & subsequencia parallelogramma usque ad BKGC separata repraesentet Fig. 101. in qua rectanguli CL basis CM producat in P. Quoniam parallelogrammi obliqui statim subsequentis MN basis MB a directione CM parallelogrammum BG versus abscedit, erit angulus LMB major angulo LMP, adeoque obtusus, ac proinde angulus MBN erit acutus. Pari ratione angulus NBO, quem efficit longitudo BN paral-

lelogrammi proxime subsequentis BG cum ejus basi BO, erit major angulo LMB, ut ex MB protracta in Q facile apparet, quamobrem angulus BOG minor erit angulo MBN; latitudo igitur parallelogrammi MN minor erit latitudine rectanguli CL, & latitudo parallelogrammi BG minor latitudine parallelogrammi MN. Sed hujusmodi parallelogramma habent (*ex hyp.*) bases, & longitudines aequales; ergo parallelogrammum MN minus erit rectangulo CL, & parallelogrammum BG minus parallelogrammo MN, idque si plura parallelogramma inter rectangulum CL, & parallelogrammum BG intercedant. Q. E. D.

COROLLARIUM

202. Si prismatis regularis AC (*Fig. 100.*) basis BF non constet pari laterum numero, semper verum reperietur, singula parallelogramma prismatis obliqui CI superficiem efficientia esse majora parallelogrammo BKGC, quod in eodem cum rectangulo BCDE jacet plano, quam conditionem semper adesse debere pono, cum de hujusmodi prismatis loquor.

THEOREMA I.

203. *Ex omnibus parallelepipedis, & prismatis regularibus eandem basim, & altitudinem habentibus, rectum minima obducitur superficie.*

Dem. Sint parallelepipeda, vel prismata AC, CI (*Fig. 100.*) aequae alta, in eadem basi BF ita constituta, ut parallelogrammum BKGC jaceat in eodem plano cum rectangulo BCDE; erit parallelogrammum BKGC aequale rectangulo BCDE; sed cetera parallelogramma parallelepipedis, vel prismatis obliqui CI superficiem componentia sunt singula majora parallelogrammo BKGC (201. 202.); ergo &c.

COROLLARIUM I.

204. Quum cylindri sint prismata regularia (195.), inter

ter omnes cylindros eadem basi, & altitudine praeditos, *minima* rectus afficitur superficie.

COROLLARIUM II.

205. Quoniam parallelogramma obliqua in parallelepipedo, vel prismate pariter obliquo sunt rectangulis respondentibus in parallelepipedo, vel prismate regulari eandem basim & altitudinem habenti semper majora, excepto parallelogrammo illo obliquo, quod jacet in eodem plano cum aequali rectangulo parallelepipedi, vel prismatis recti (201. 202.); cujuscumque prismatis recti superficies *minor* erit superficie prismatis obliqui sub eadem basi, & altitudine; quod patet, si ex planis, quibus terminantur prismata diversa aeque alta tam recta, quam obliqua, & bina in eadem basi regulari constituta, alia duo prismata, alterum rectum irregulare, obliquum alterum, sub aequali basi & altitudine, rite concinnentur; quapropter

COROLLARIUM III.

206. Quomodocumque planum unum vel plura per integram longitudinem cylindri recti traducta illum dividant, portiones istae cylindricae resectae *minimam* comparate ad alias portiones cylindricas obliquas in eadem basi & altitudine constitutas, & modo consimili resectas habebunt superficiem.

THEOREMA II.

207. *Ex omnibus parallelepipedis, prismatis, & cylindris basi eidem insistentibus, & aequali superficie praeditis solidum illud, quod est rectum, est maximum ceterorum solidorum ejusdem generis, nimirum eodem laterum, vel angulorum numero in basibus praeditorum.*

Dem. Si parallelepipeda, prismata, & cylindri habeant sub iisdem basibus superficies aequales, ad eandem altitudinem assurgere nequeant, secus solida obliqua ma-

jorem (204. 205. 206.) haberent superficiem contra hypothesim; sed cum huiusmodi solida obliqua minorem rectis habent sub eadem basi altitudinem, sunt iis semper minora; ergo &c.

THEOREMA III.

208. *Ex omnibus parallelepipedis, & prismatis ejusdem generis in aequalibus basibus, & altitudinibus constitutis, rectum illud, cujus basis est regularis, minima tegitur tam curva, quam integra superficie.*

Dem. Ex omnibus parallelepipedis, vel prismatis aequae altis basi eidem innixis, rectum minimam habet superficiem (205.). Sed omnium huiusmodi solidorum rectorum sub aequalibus basibus, & altitudinibus superficies se excedunt pro perimetrorum in basibus magnitudine; & inter omnia polygona aequalia ejusdem generis, regulare minima circumdatur perimetro (64.); ergo &c.

THEOREMA IV.

209. *Ex omnibus parallelepipedis, & prismatis ejusdem generis sub aequali superficie integra, & altitudine, rectum illud, quod basim habet regularem, est maximum.*

Dem. Si huiusmodi solida aequae alta basibus aequalibus insideant, illud, cujus basis est regularis, minima obducetur superficie (208.), quod hypothesei adversatur; ergo ut superficies fiat aequales, basis regularis debet augeri, vel basis irregularis imminui. Sed altitudines sunt aequales; ergo &c.

THEOREMA V.

210. *Ex omnibus parallelepipedis, & prismatis ejusdem generis cum bases, tum superficies integras aequales habentibus, illud, quod basi regulari adhaeret, est maximum.*

Dem.

Dem. Quoniam basis regularis perimetro prae basibus irregularibus aequalibus minima cingitur (64.), ut in hisce solidis rectis superficies sint aequales, altitudo in solido basi regulari gaudente major esse debet, adeoque hujusmodi solidum erit *maximum*. Sed ut omnia ista solida obliqua iisdem basibus cum solidis rectis innixa superficies habeant eorum superficiebus aequales, esse debent ipsis minora (207.); ergo &c.

THEOREMA VI.

211. *Ex omnibus parallelepipedis, & prismatis ejusdem generis aequales altitudines, & bases isoperimétras habentibus, parallelepipedum, vel prisma rectum basi regulari praeditum est maximum.*

Dem. Ejusmodi parallelepipeda, vel prismata, ob aequales altitudines, sunt in basium ratione; sed bases sunt isoperimétrae, & inter figuras omnes isoperimétras ejusdem generis regularis est maxima (63.); ergo &c.

LEMMA.

212. *Si recta utcumque dividatur, cubus sub tota aequat aggregatum cuborum sub segmentis, una cum triplo solidi ex totius in segmenta multiplicatione prodeuntis.*

Dem. Sit AB (Fig. 102.) utcumque divisa in C, & cubus totius AB sit DE. Sectis AD, AF in G, H, ita ut sit $GD = HF = BC$, imaginare plana GK, HI, LM traducta per puncta G, H, C, oppositis cubi faciebus, queis interponuntur, parallela, seu cubi faciebus, quas dividunt, perpendicularia. Perspicuum est, totum cubum resolutum esse in duos cubos GO, IK latera segmentis AC, CB respectu aequalia habentes, nec non in tria solida, quae oriuntur ducendo LE in rectangulum EN, item PT in rectangulum TV, & FH in rectangulum HI, nempe in $3AB \cdot AC \cdot BC$. Sed ex omnibus hisce solidis, ve-

lut

lut totum ex suis partibus, cubus ipse DE coalescit; er-

$$\text{go } \overline{AB}^3 = \overline{AC}^3 + \overline{BC}^3 + 3AB \cdot AC \cdot BC. \text{ Q. E. D.}$$

T H E O R E M A VII.

213. *Ex universis parallelepipedis aequalibus, minima cubus obducitur superficie.*

Dem. Parallelepipeda recta, quorum bases sint quadrata, primò considerentur, sitque BD (*Fig. 103.*) altitudo, BC latus baseos quadratae parallelepipedi, AB latus

cubi, ac ponatur $BD > AB$. Habemus (212.) $\overline{AC}^3 + \overline{BC}^3$

$+ 3AB \cdot AC \cdot BC = BD \cdot \overline{BC}^2$, five $\overline{BC}^3 + 3AB \cdot AC \cdot BC < BD \cdot \overline{BC}^2$,

quare $2\overline{BC}^3 + 6AB \cdot AC \cdot BC < 2BD \cdot \overline{BC}^2$, seu $2\overline{BC}^2$

$+ 6AB \cdot AC < 2BD \cdot BC$. Adde utrinque $\overline{BC}^2$, eritque $3\overline{BC}^2$

$+ 6AB \cdot AC < 2BD \cdot BC + \overline{BC}^2$. Sed $3AB \cdot AC + 3AB \cdot BC$

$(= 3AB \cdot AC + 3AC \cdot BC + 3\overline{BC}^2) < 3\overline{BC}^2 + 6AB \cdot AC$; er-

go multo magis $3AB \cdot AC + 3AB \cdot BC = 3\overline{AB}^2 < 2BD \cdot BC +$

$\overline{BC}^2$, five $6\overline{AB}^2 < 4BD \cdot BC + 2\overline{BC}^2$; *quod erat primum.*

Stantibus reliquis, sit $BD < AB$ (*Fig. 104.*). Quoniam

$\overline{CB}^3 = \overline{AC}^3 + 3AB \cdot AC \cdot BC + \overline{AB}^3$ (212.), erit etiam $\overline{BC}^3$

$3AB \cdot AC \cdot BC - \overline{AC}^3 = \overline{AB}^3$; quare $\overline{AB}^3 > \overline{BC}^3 - 3AB \cdot AC \cdot$

$BC - \overline{AC}^2 \cdot BC$. Sed (*per hyp.*) $\overline{AB}^3 = \overline{BC}^2 \cdot BD$; ergo $\overline{BC}^2 \cdot BD$

$> \overline{BC}^3 - 3AB \cdot AC \cdot BC - \overline{AC}^2 \cdot BC$, five $BC \cdot BD > \overline{BC}^2 - 3AB \cdot$

$AC = \overline{AC}^2$, five $2BC \cdot BD > 2\overline{EC}^2 - 6AB \cdot AC = 2\overline{AC}^3$, adeoque potiori jure $2BC \cdot BD + \overline{BC}^2 > 3\overline{AB}^2$; quod erat secundum.

Si parallelepipeda aequalia tam recta, quam obliqua aequales habeant altitudines, rectum illud, cujus basis est quadratum, minima clauditur integra superficie (208.); adeoque etiam inter omnia hujusmodi parallelepipeda, cubus ipsis aequalis superficie minima obducitur; quod erat tertium.

LEMMA.

214. Si recta utcumque dividatur, cubus, qui fit a tota, est aequalis partium cubis, simul cum duobus solidis, quae prodeunt ex partium triplis per earundem quadrata reciproce multiplicatis.

Dem. Rectae AB (Fig. 102.) utcumque divisae in C cubus sit DE. Retenta lemmatis novissimi (212.) constructione, liquet, totum cubum DE resolutum esse

1. in duos cubos GO, IK, quorum latera aequantur partibus AC, CB; 2. in tria parallelepipeda aequalia NO, DQ, OR, quae oriuntur, ducendo CB in quadratum BS, item GD in quadratum DI, atque FH in quadratum HQ, nempe in $3\overline{AC} \cdot BC$; 3. in alia tria parallelepipeda minora invicem aequalia, quae gignuntur multiplicando KE in quadratum EO, pariterque SN in quadratum NM, ac tandem IT in quadratum TR, nimirum in $3\overline{AC} \cdot BC$. Sed haec omnia simul sumpta totum cubum componunt; ergo $\overline{AB}^3 = \overline{AC}^3 + \overline{BC}^3 + 3\overline{AC} \cdot BC^2 + 3\overline{AC}^2 \cdot BC$; Q. E. D.

COROLLARIUM

215. Quum fit $AC \cdot CB + \overline{CB}^2 = AB \cdot CB$, erit $\overline{AC}^2 + AC \cdot CB = \overline{AB}^2 - AB \cdot CB$, itidemque $3\overline{AC}^2 + 3AC \cdot CB = 3\overline{AB}^2 - 3AB \cdot CB$, quae plana aequalia si in eandem ducantur altitudinem BC , orietur $3\overline{AC}^2 \cdot BC + 3AC \cdot \overline{BC}^2 = 3\overline{AB}^2 \cdot BC - 3AB \cdot \overline{BC}^2$, factisque in magnitudine nuper exposita $\overline{AC}^3 + \overline{BC}^3 + 3\overline{AC}^2 \cdot BC + 3AC \cdot \overline{BC}^2$ substitutionibus, habebis $\overline{AB}^3 = \overline{AC}^3 + \overline{BC}^3 + 3\overline{AB}^2 \cdot BC - 3AB \cdot \overline{BC}^2$. Detrahe hinc inde $\overline{BC}^3 + 3\overline{AB}^2 \cdot BC$, & remanebit $\overline{AB}^3 - \overline{BC}^3 - 3\overline{AB}^2 \cdot BC = \overline{AC}^3 - 3AB \cdot \overline{BC}^2$. Adde utrinque $3AB \cdot \overline{BC}^2$, ac tandem fiet $\overline{AB}^3 - 3\overline{AB}^2 \cdot BC + 3AB \cdot \overline{BC}^2 - \overline{BC}^3 = \overline{AC}^3$. Similiter ostendetur, esse $\overline{AB}^3 - 3\overline{AB}^2 \cdot AC + 3\overline{AC}^2 \cdot AB - \overline{AC}^3 = \overline{BC}^3$.

THEOREMA VIII.

216. *Ex universis parallelepipedis superficies aequales habentibus, cubus est maximus.*

Dem. Politis omnibus ut in Theor. antec. (213.) eodemque ordine servato, esto $BD > AB$ (Fig. 103.); quoniam (ex hyp.) habemus $3\overline{AC}^2 + 6AC \cdot BC + 3\overline{BC}^2 = 2DB \cdot BC + \overline{BC}^2$, seu $3\overline{AC}^2 + 6AC \cdot CB + 2\overline{CB}^2 = 2DB \cdot BC$, seu sumptis dimidiis, $\frac{3}{2}\overline{AC}^2 + 3AC \cdot CB + \overline{CB}^2 = DB \cdot BC$, erit $3\overline{AC}^2$

+ 3AC

+ $3 \overline{AC} \cdot \overline{CB} + \overline{CB}^2 > \overline{DB} \cdot \overline{BC}$. Ducantur omnia ista plana
in altitudinem $\overline{BC}$; fiet $3 \overline{AC} \cdot \overline{BC} + 3 \overline{AC} \cdot \overline{BC} + \overline{BC}^3 > \overline{DB} \cdot \overline{BC}$.
 $\overline{BC}^2$. Sed $\overline{AC} + 3 \overline{AC} \cdot \overline{BC} + 3 \overline{AC} \cdot \overline{BC} + \overline{BC}^3 = \overline{AB}^3$ (214.) $>$
 $3 \overline{AC} \cdot \overline{BC} + 3 \overline{AC} \cdot \overline{BC} + \overline{BC}^3$; ergo multo magis $\overline{AB}^3 > \overline{DB} \cdot \overline{BC}$;
 $\overline{BC}^2$; quod erat primum.

Iisdem manentibus, statue $\overline{BD} < \overline{AB}$ (Fig. 104.). Erit
 $3 \overline{AB}^2 = 3 \overline{BC}^2 - 6 \overline{AC} \cdot \overline{BC} + 3 \overline{AC}^2 = 2 \overline{BD} \cdot \overline{BC} + \overline{BC}^2$; quare
 $3 \overline{BC}^2 - 6 \overline{AC} \cdot \overline{BC} + 3 \overline{AC} \cdot \overline{BC} = 3 \overline{BC}^2 - 3 \overline{AC} \cdot \overline{BC} > 2 \overline{BD} \cdot \overline{BC} + \overline{BC}^2$,
five $2 \overline{BC}^2 - 3 \overline{AC} \cdot \overline{BC} > 2 \overline{BD} \cdot \overline{BC}$; adeoque $2 \overline{BC}^2 - 3 \overline{AC} \cdot \overline{BC} > 2 \overline{BD} \cdot \overline{BC}$, seu $\overline{BC}^2 - \frac{3}{2} \overline{AC} \cdot \overline{BC} > \overline{BD} \cdot \overline{BC}$; ac
multo magis $\overline{BC}^3 - 3 \overline{AC} \cdot \overline{BC}^2 > \overline{BD} \cdot \overline{BC}^2$. Sed $\overline{BC}^3 - 3 \overline{AC} \cdot \overline{BC}^2$
 $\overline{BC}^2 < \overline{BC}^3 - 3 \overline{AC} \cdot \overline{BC} + 3 \overline{AC} \cdot \overline{BC} - \overline{AC}^3 = \overline{AB}^3$ (215.); ergo
potiori jure $\overline{AB}^3 > \overline{BD} \cdot \overline{BC}^2$; quod erat secundum.

Si parallelepipeda tam recta, quam obliqua aequales
habeant sub aequali superficie integra altitudines, illud
quod basi quadrata innititur, erit maximum (209.); qua-
propter etiam inter omnia hujusmodi parallelepipeda cu-
bus aequali cum iisdem superficie praeditus, est maximus;
quod erat tertium.

THEOREMA IX.

217. Ex omnibus cubis, qui bini accepti laterum, seu
radicum summas aequales habent, par illud, quod duos cubos
aequales continet, minimam exhibet superficiem.

Dem.

Dem. Sint duo cubi, quorum latera, DE, EF (*Fig. 105.*); sit aliud cuborum par, quorum latera AB, BC invicem aequentur, sitque praeterea $AB + BC = DE + EF$; summa planorum, quibus comprehenditur cuborum par sub lateribus aequalibus AB, BC, est ad summam planorum, quibus tegitur cuborum par sub lateribus inaequalibus DE, EF, ut $2 \overline{AB}^2$ ad $\overline{DE}^2 + \overline{EF}^2$; sed primum quadratorum aggregatum est altero semper minus (33.); ergo &c.

THEOREMA X.

218. Sit quilibet cuborum invicem aequalium numerus; sint totidem cubi non omnes invicem aequales, in quibus simul sumptis laterum, seu radicum aggregatum adaequet aggregatum laterum, seu radicum cuborum aequalium; dico cuborum istorum aequalium simul sumptorum superficiem minimum aggregatum componere.

Dem. Si negas; in serie cuborum non omnium aequalium sint duo saltem cubi inaequales A^3, B^3 . Tam haec quam invicem aequales imaginare duos cubos, in quibus laterum, seu radicum aggregatum adaequet aggregatum laterum, seu radicum in cubis A^3, B^3 existentium. Cuborum invicem aequalium superficies minimum aggregatum formabit (33.); ergo cuborum inaequalium series minimum non continet superficiem aggregatum, quod hypothesei adversatur; & ita semper, donec ad cubos omnes aequales pervenias. Q. E. D.

COROLLARIUM I.

219. Idem locum obtinet in solidis universis similibus, in quibus laterum homologorum aggregata sunt aequalia; huiusmodi enim solidorum superficies sunt laterum homologorum quadratis proportionales.

COROLLARIUM II.

220. Si recta sit in quocumque partes aequales, nec non in totidem non omnes aequales quomodocumque divisa, cuborum ex partibus aequalibus superficies simul sumptae *minimum* aggregatum efficient. Idem de solidorum similium, quorum latera homologa supra aequales hasce partes consistant, superficiebus est pronunciandum.

THEOREMA XI.

221. Ex omnibus cubis, qui bini accepti laterum, seu radicum summas aequales habent, par illud, quod duos cubos aequales comprehendit, est *minimum*.

Dem. Duorum cuborum aequalium latera AC, CB (Fig. 37.) in directum posita rectam AB efficiant. Quoniam lateribus istis aequari debent latera cuborum inaequalium, hujusmodi latera sint AD, DB. Cubus lateris AD, sive

AC + CD, erit $\overline{AC}^3 + 3\overline{AC}^2 \cdot CD + 3AC \cdot \overline{CD}^2 + \overline{CD}^3$ (214.);

cubus lateris DB, sive AC - CD, erit $\overline{AC}^3 - 3\overline{AC}^2 \cdot CD +$

$3AC \cdot \overline{CD}^2 - \overline{CD}^3$ (215.), quorum cuborum aggregatum =

$2\overline{AC}^3 + 6AC \cdot \overline{CD}^2$; sed cuborum ex lateribus aequalibus AC,

CB aggregatum est $2\overline{AC}^3$; ergo &c.

COROLLARIUM

222. Si recta sit bifariam, & non bifariam divisa, aggregatum cuborum ex portionibus aequalibus erit *minimum*.

THEOREMA XII.

223. Sit quilibet cuborum invicem aequalium; numerus; sine
toti-

totidem cubi, quorum saltem aliquis non sit reliquis aequalis, ea tamen conditione, ut laterum aggregatum in serie cuborum invicem aequalium adaequet laterum aggregatum in altera serie; ajo, cuborum invicem aequalium aggregatum esse minimum.

Demonstratio est similis demonstrationi Thor. X. (218.).

C O R O L L A R I U M

224. Si recta sit in quocumque partes aequales, nec non in totidem non omnes aequales quomodocumque divisa; cubi partium aequalium *minimum* efficient aggregatum. Quod de solidis similibus & aequalibus comparate ad totidem solida ipsis similia & non omnia inter se aequalia certum est, dummodo solidorum istorum latera homologa in hujusmodi rectae sic divisae portionibus accipiantur.

T H E O R E M A XIII.

225. *Exprimat n numerum quemlibet integrum affirmativum, & recta AB (Fig. 37.) ita secetur in C, ut*

sit $CB = \frac{1}{n+1} AB$; *sumpto quovis alio puncto D, dico, fore*

semper $\sqrt[3]{AC} + n \sqrt[3]{CB} < \sqrt[3]{AD} + n \sqrt[3]{DB}$.

Dem. Quoniam posito $n=1$, res patet (221.), statuatur $n=2$; erit CB pars tertia ipsius AB. Finge, esse AC bifariam divisam. Cubus portionis AC octo cubos aequales continebit, quorum radices (quae singulae portionem CB adaequant) simul sumptae quadruplum component ipsius AC. Radices quatuor cuborum, quorum un-

quisque sit cubo $\sqrt[3]{CB}$ aequalis, aggregatum efficiunt quadruplum portionis CB. Quare positis omnibus hujusmodi cuborum radicibus in directum, recta orietur totius AB quadrupla. Secta deinde bifariam portione AD, pari ratio-

ratione constabit, cubum $\overline{AD}^3$ in octo cubos aequales dispesci posse, quorum radices simul sumptae erunt quadruplae portionis AD; quatuor autem radices cuborum singulorum aequalium cubo reliquae portionis DB, sunt ipsius DB quadruplae; ergo istarum quoque omnium secundarum radicum aggregatum erit totius AB quadruplum. Sed posita $CB = \frac{1}{3} AB$, duodecim memorati cubi

sunt invicem aequales; ergo (223.) habemus $\overline{AC}^3 + 4\overline{CB}^3 < \overline{AD}^3 + 4\overline{DB}^3$.

Fiat modo $n = 3$; erit $CB = \frac{1}{4} AB$, & cubus portionis AC (quae trifariam secta intelligatur) viginti septem cubos cubo $\overline{CB}^3$ singulos aequales comprehendet, quorum radices simul sumptae erunt noncuplae portionis AC; no-

vem autem cuborum $\overline{CB}^3$ radices noncuplum efficiunt portionis CB. Praeterea trifariam secta portione AD, ejus cubus cubos viginti septem aequales complectetur, quorum radices simul sumptae noncuplum ipsius AD continent, & novem cubi, quorum unusquisque cubum DB adaequet, radices habent, quarum aggregatum est portionis DB noncuplum. Quum itaque singuli cubi, in quos cubum $\overline{AC}^3$ resolutum posuimus, sint aequales cubo $\overline{CB}^3$, patet, esse debere $\overline{AC}^3 + 9\overline{CB}^3 < \overline{AD}^3 + 9\overline{DB}^3$.

Similiter procedendo, si fiat $CB = \frac{1}{5} AB$, invenietur

$\overline{AC}^3 + 16\overline{CB}^3 < \overline{AD}^3 + 16\overline{DB}^3$; adeoque generatim si statua-

$CB = \frac{1}{n+1} AB$, elicietur $\overline{AC}^3 + n \overline{CB}^3 < \overline{AD}^3 + n \overline{DB}^3$; Q. E. D.

COROLLARIUM

226. Idem sentiendum de solidis similibus, quorum latera homologa sint AC, CB , respectu aliorum solidorum prioribus similium, & latera ipsorum lateribus homologa AD, DB habentium.

THEOREMA XIV.

227. In recta AB (Fig. 37.) ita divisa in C , ut fiat $nCB = AB$ (n numerum quemvis integrum affirmativum, unitate exclusa, indicante) sumatur quodlibet aliud punctum D ;

ajo, cubi $\overline{AC}^3$ superficiem una cum superficiebus cuborum $(n-1) \overline{CB}^3$ semper esse minorem superficie cubi

$\overline{AD}^3$ una cum superficiebus cuborum $(n-1) \overline{DB}^3$.

Dem. Superficies cubi $\overline{AC}^3$ est sextupla quadrati $\overline{AC}^2$;

superficies singulorum cuborum $(n-1) \overline{CB}^3$ sunt sextuplae

quadrati $\overline{CB}^2$, superficies itidem cubi $\overline{AD}^3$ est sextupla qua-

drati $\overline{AD}^2$, nec non superficies singulorum cuborum $(n-1)$

$\overline{DB}^3$ sunt sextuplae quadrati $\overline{DB}^2$. Ergo superficies cubi

$\overline{AC}^3$ unà cum superficiebus cuborum $(n-1) \overline{CB}^3$ sunt ad su-

perficiem cubi $\overline{AD}^3$ unà cum superficiebus cuborum $(n-1)$

$\overline{DB}^3$, ut $\overline{AC}^2 + (n-1) \overline{CB}^2$ ad $\overline{AD}^2 + (n-1) \overline{DB}^2$. Sed cum

nCB

$nCB = AB$, fit semper $\overline{AC}^2 + (n-1) \overline{CB}^2 < \overline{AD}^2 + (n-1) \overline{DB}^2$ (79.); ergo &c.

COROLLARIUM

228. Idem ad solida similia, debitis adhibitis praecauti-
onibus, extendi potest.

LEMMA.

229. Concipe parallelepipedam, vel prismata recta, quo-
rum bases sint quadrata, aut polygona regularia ejusdem
generis BCDE, HILM (Fig. 106. 107.), altitudines AB,
GH; ajo, cylindrorum ipsis inscriptorum superficies inte-
gras esse dictorum solidorum superficiebus integris pro-
portionales.

Dem. Basibus BCDE, HILM in triangula isoscelia ae-
qualia, & similia resolutis, ut figuris, inscribantur cir-
culi, ex quorum centrīs N, O (quae erunt in trian-
gulorum isoscelium verticibus simul coeuntibus) demit-
tantur in latera BC, HI normales NP, OQ contactuum pun-
ctis P, Q occurrentes. Parallelepipedum, aut prismatis al-
terius superficies integra erit ad alterius parallelepipedum,
aut prismatis integram superficiem, ut mBC . ($AB + NP$)
ad mHI . ($GH + OQ$), posito laterum BC, aut HI nu-
mero = m . Jam verò circumferentia figurae BCDE inscri-
pta vocata T, & circumferentia inscripta figurae HILM
appellata V, superficies integra cylindri alterius erit ad
alterius cylindri integram superficiem, ut T. ($AB + NP$)
ad V. ($GH + OQ$). Sed $T : V = mBC : mHI$; ergo mBC .
($AB + NP$): mHI . ($GH + OQ$) = T. ($AB + NP$): V.
($GH + OQ$). Q. E. D.

THEOREMA XV.

230. Ex omnibus cylindris aequalibus, ille, cujus al-
titudo

titudo baseos diametrum adaequat, minima superficiei integra comprehenditur.

Dem. Ex universis parallelepipedis aequalibus, cubus minimam exhibet superficiem (213.); sed cylindrorum rectorum superficies integrae sunt parallelepipedis circumscriptis proportionales (229.); ergo inter omnes cylindros rectos aequales, ille, cujus altitudo baseos diametrum adaequat, *minima* tegitur superficiei. Jam verò cylindri obliqui rectis aequales, & in eadem basi constituti, majori quam ipsi pollent superficiei (204.); ergo &c.

C O R O L L A R I U M

231. Quoniam prismata regularia ejusdem generis, cylindris rectis aequalibus circumscripta, sunt & ipsa aequalia, atque integras superficies habent cylindrorum superficieribus integris proportionales (229.); prisma cylindro recto, cujus altitudo baseos diametrum adaequet, circumscriptum, *minima* ex istis obducetur integra superficiei. Idcirco inter omnia prismata recta ejusdem generis aequalia, illud, cujus altitudo, ex: gr: AB (Fig. 106.), adaequat duplum radij NP a centro N baseos $BCDE$ ad unum BC ex ejusdem lateribus normaliter ducti, *minima* afficietur integra superficiei. Sed ex omnibus prismatis ejusdem generis sub aequalibus basi- bus, & altitudinibus, rectum illud, cujus basis est regularis, minima praeditum est superficiei (208.); ergo generatim ex universis prismatis ejusdem generis aequalibus basi cuicumque innixis, regulare illud, cujus altitudo est dupla radij a centro baseos ad unum ex ejusdem lateribus normaliter ducti, *minima* superficiei integra comprehenditur.

T H E O R E M A XVI.

232. *Ex omnibus cylindris aequales superficies integras habentibus; rectus ille, cujus altitudo baseos diametrum adaequat, est maximus.*

Dem.

Dem. Ex universis parallelepipedis aequali superficie obductis cubus est maximus (216.); sed cylindri, quibus hujusmodi parallelepipeda circumscribuntur, habent & ipsi superficies integras aequales (229.); nec non sunt ipsis proportionales; ergo &c.

COROLLARIUM

233. Igitur ex universis quoque prismatis aequali superficie integra praeditis, regulare illud, cujus altitudo duplum radij a centro baseos ad unum ex ejusdem lateribus normaliter educti adaequat, est *maximum*; quod facile ostenditur, si ratiocinium illi analogum, quod in Theorematis praecedentis corollario exposuimus (231.), adhibeatur.

THEOREMA XVII.

234. Ex omnibus cylindris aggregata ex altitudinibus, & basium diametris aequalia habentibus; illud, in quo baseos diameter duplam altitudinem adaequat, est maximus.

Dem. In duobus cylindris AB, CD (*Fig.* 108. 109.), quorum altitudines AG, CE, & basium diametri GB, ED, sit $AG + GB = CE + ED$, sed in cylindro AB sit $GB = 2 AG$. Cylindrus AB erit ad cylindrum CD, ut $AG. \overline{GB}^2$ ad $CE. \overline{ED}^2$; sed $AG. \overline{GB}^2 > CE. \overline{ED}^2$ (143.); ergo &c.

COROLLARIUM

235. Idem quoque sub eadem conditione se habet in conis; pariterque in prismatis regularibus ejusdem generis, in quibus aggregata ex altitudinibus, & basium duplis radijs a centro earundem basium ad latus aliquod normaliter eductis, aequantur.

THEOREMA XVIII.

236. *Inter omnes cylindros rectos AB, CD (Fig. 108. 109.) superficies convexas in proportionem geometricam reciprocam cum basibus GMB + AHN, EDF + CQR habentes; ille AB, cujus altitudo AG baseos GBM radium GP adaequat, minima induitur integra superficie.*

Dem. Quum sit $AG = GP$, superficies curva cylindri AB erit dupla baseos GBM, sive aequalis aggregato basium GBM, AHN; est autem (per hyp.) superficies curva cylindri AB ad superficiem curvam cylindri CD, ut (basium EDF, CQR aggregatum ad aggregatum basium GBM, AHN; ergo si superficies curva cylindri CD sit major superficie curva cylindri AB, basium EDF, CQR aggregatum erit minus aggregato basium GBM, AHN, & vicissim; adeoque superficies integra cylindri AB erit minor superficie integra cylindri CD (per 25. 5. Elem.) & hoc semper. Q. E. D.

COROLLARIUM

237. *Idem ratiocinium prismatis quibuscumque potest etiam applicari; etenim inter prismata, de quibus est quaestio, illud, in quo basium superficies reliquam superficiem adaequat, minima superficie integra claudetur,*

THEOREMA XIX.

238. *Inter omnes pyramides ABDEG, FBDEG (Fig. 110.) aequae altas idem rectangulum BE pro basi, nec non triangula ADE, FDE, & hisce opposita ABG, FBG jacentia in iisdem planis habentes, recta ABDEG minima obducitur superficie.*

Dem. Concipe planum per harum pyramidum axes AG, FC transiens. Liquet, hoc bifariam dividere pyramides per sectiones AHI, FHI, quae erunt triangula aequalia in eadem basi HI constituta, adeoque trianguli isoscelis AHI

AHI perimeter erit minor perimetro trianguli scaleni FHI (7.). Sed AH, AI, FH, FI sunt altitudines triangulorum ABD, AEG, FBD, FEG, & reliqua triangula sunt (*ex hyp.*) aequalia; ergo &c.

THEOREMA XX.

239. Inter omnes pyramides ABDEG, FBDEG (Fig. 110.) idem rectangulum pro basi, aequales superficies, ac duo triangula opposita in iisdem planis jacentia habentes, recta est maxima.

Dem. Quum pyramidum superficies sint aequales, triangulorum ABD, AGE aggregatum erit aequale aggregato triangulorum FBD, FGE, adeoque triangulorum ABD, AGE altitudines AH, AI simul sumptae erant triangulorum FBD, FGE altitudinibus FH, FI simul sumptis aequales; triangula igitur AHI, FHI basi eidem insidentia erunt isoperimetra. Sed tunc trianguli AHI altitudo est major altitudine trianguli FHI (10.); ergo &c.

THEOREMA XXI.

240. Ex omnibus conis rectis aequalibus ABIC, DEKF (Fig. 111. 112.), quorum axes AG, DH; ille ABIC, in quo altitudo AG radij baseos duplum potest, seu in quo

$\overline{AG} = 2\overline{BG}$, minimam convexam superficiem supeditat.

Dem. Per axes AG, DH traducantur duo plana; sectiones erunt duo triangula isoscelia BAC, EDF. Jam vero quum conus sint ut producta ex quadratis diametro- rum basium in altitudines, & conus ABIC ponatur aequalis cono DEKF, in triangulis BAC, EDF erit AG.

$\overline{BC} = \overline{DH}$. $\overline{EF}$; sed triangulum BAC habet $\overline{AG} = 2\overline{BG}$; ergo $\overline{AB} \cdot \overline{BG} < \overline{DE} \cdot \overline{EH}$ (153.). Ut autem $\overline{AB} \cdot \overline{BG}$ ad $\overline{DE} \cdot \overline{EH}$, ita est superficies convexa conus recti ABIC ad su-

perficiem convexam coni recti DEKF; ergo superficies convexa coni ABIC est *minor* superficie convexa cujuscunque coni recti eidem aequalis DEKF. Q. E. D.

C O R O L L A R I U M

241. Idem de pyramidibus regularibus aequalibus ejusdem generis statuendum est; in ijs enim illa, cujus altitudo duplum potest radij a baseos centro ad ejusdem baseos latus aliquod normaliter educti, *minimam* habet, basibus exclusis, superficiem.

T H E O R E M A XXII.

242. *Ex omnibus conis rectis superficies convexas aequales habentibus, ille, cujus altitudo duplum potest radij baseos, est maximus.*

Dem. Sint coni recti ABIC, DEKF (Fig. 111. 112.) superficiebus curvis aequalibus praediti, quorum axes AG, DH, ductisque basium diametris BC, EF, conus ABIC ejus sit naturae, ut altitudo AG duplum possit baseos radij BG. Ex punctis G, H demitte super latera AB, DE normales GM, HN. Conorum ABIC, DEKF soliditates sunt ut eorum superficies convexae ductae in respectivas normales GM, HN; sed dictae superficies convexae ponuntur aequales; ergo soliditas coni ABIC est ad soliditatem coni DEKF, ut GM ad HN; in triangulis autem BAC, EDF ex conorum sectionibus per axes coortis est GM omnium HN maxima (154.); ergo conus

ABC, in quo $\overline{AG} = 2\overline{BG}$, est *major* cono quovis DEKF aequali cum ipso convexa superficie affecto. Q. E. D.

C O R O L L A R I U M

243. Idem ratiocinium ad pyramides regulares ejusdem generis, in quibus superficies, basibus con computatis aequantur, applicari potest; in ijs siquidem illa, cujus altitudo duplum potest radii a centro baseos ad ipsius baseos latus aliquod normaliter educti, est *maxima* THEO.

THEOREMA XXIII.

244. *Ex omnibus conis rectis aequalibus, ille cujus altitudo duplum potest diametri baseos, minimam, exhibet integram superficiem.*

Dem. Sint triangula rectangula ACB, FIH (Fig. 113. 114.), in quibus $AC^2 \cdot BC^2 = FI^2 \cdot HI^2$, iisque supra altitudines AC, FI inscribantur, ut in figuris, semicirculi CKN, IRS, quorum radij PC, QI; in triangulo autem ACB altitudo AC octuplum possit baseos BC. Quoniam (*ex hyp.*) $HI : BC = AC \cdot CB : FI \cdot IH = PC \cdot (AB + BC) : QI \cdot (FH + HI)$, erit $PC \cdot BC \cdot (AB + BC) = QI \cdot HI \cdot (FH + HI)$; unde $(AB + BC) \cdot BC : (FH + HI) \cdot HI = QI : PC$; sed $QI < PC$ (176.); ergo $(AB + BC) \cdot BC < (FH + HI) \cdot HI$, & sic semper. Fac modo, ut haec triangula revolvantur circa altitudines AC, FI; orientur coni aequales ABED, FHML; sed horum superficies integrae sunt ut $(AB + BC) \cdot BC$ ad $(FH + HI) \cdot HI$; ergo &c.

COROLLARIUM

245. Idem ad pyramides regulares aequales ejusdem generis aptatur; ex istis enim omnibus illa, cujus altitudo duplum potest dupli radij a centro baseos ad baseos ejusdem latus aliquod normaliter educti, minima tegitur integra superficie.

THEOREMA XXIV.

246. *Ex omnibus conis rectis, quorum integrae superficies aequantur, ille, cujus altitudo duplum potest diametri baseos, est maximus.*

Dem. Sint (Fig. 113. 114.) triangula rectangula ACB, FIH (dimidia pro integris expono), in quibus $AB \cdot BC$

$+ \overline{BC}^2 = FH \cdot HI + \overline{HI}^2$, iisque inscribantur, ut in figuris, semi-

semicirculi CKN, IRS, quorum radij PC, QI, trianguli vero ABC altitudo AC octuplum possit baseos BC. Quum sit semicirculus CKN major semicirculo IRS (176.), etiam radius PC major erit radio QI; quapropter AB. BC.

$CP + BC \cdot CP > FH \cdot EI \cdot IQ + HI \cdot IQ$. Sed si triangula ACB, FIH (stantibus altitudinibus AC, FI) circumagi concipiantur, coni inde prodeuntes erunt in eadem ratione majoris inaequalitatis; ergo &c.

COROLLARIUM

247. Idem locum obtinet in pyramidibus regularibus ejusdem generis aequali superficie integra gaudentibus; illa enim ex istis est *maxima*, cujus altitudo duplum potest dupli radij a centro baseos ad ipsius baseos latus aliquod normalitereducti.

THEOREMA XXV.

248. *Ex omnibus conis rectis, qui per axes divisi aggregata longitudinum in superficiebus convexis a planis secantibus effectarum, habent aequalia; ille, in quo baseos radius duplum potest altitudinis, est maximus.*

Dem. Esto AB (Fig. 77.) longitudo communis superficiei convexae in conis rectis, quorum altitudines BC, BE, baseos radij AC, AE, ponaturque $\overline{AC} = 2\overline{BC}$; erit $\overline{AC} \cdot \overline{CB}$

$> \overline{AE} \cdot \overline{EB}$ (141.); sed si triangula ABC, ABE circa axes BC, BE in gyrum ducas, coni inde confluentes sunt ut producta $\overline{AC} \cdot \overline{CB}$, $\overline{AE} \cdot \overline{EB}$; ergo conus ex triangulo BAC major erit cono ex triangulo BAE, & ita semper. Q. E. D.

THEOREMA XXVI.

249. *Ex universis cylindris aequalibus, rectus ille, cujus*

jus altitudo baseos diametrum adaequat, minimam praebet superficiem integram prae singulis omnium prismaticum ipsi aequalium integris superficiebus.

Dem. Si prisma rectum ad eandem cum cylindro recto ipsi aequali assurgat altitudinem, bases aequabuntur, & superficies, demptis basibus, erunt ut basium perimetri; sed cylindri basis minori perimetro circumdatur (197.); ergo cylindri recti superficies erit minor superficie prismatis recti aequali cum ipso altitudine, ac soliditate praediti. Jam vero ex universis cylindris aequalibus, ille, cujus altitudo baseos diametrum adaequat, minima obducitur integra superficie (230.); ergo cylindrus iste minima prae prismatis omnibus rectis ipsi aequalibus superficie integra obducetur. Superficies autem prismatum rectorum sub iisdem basibus, & altitudinibus sunt prismatum obliquorum superficiebus minores [203]; ergo &c.

THEOREMA XXVII.

250. *Cylindrus rectus, cujus altitudo baseos diametrum adaequat, est omnium prismatum aequales cum ipso superficies integras habentium maximus.*

Dem. Si prisma rectum, & cylindrus rectus basibus aequalibus innitantur, cylindri basis minori perimetro donabitur (197.), quare quum superficies integrae esse debeant aequales, cylindri altitudo maior erit altitudine prismatis; sed soliditates sunt hoc in casu ut altitudines; ergo cylindrus rectus erit major prismae sub aequali basi, ac superficie. Verum ex omnibus cylindris aequali superficie integra affectis, rectus ille, cujus altitudo baseos diametrum adaequat, est maximus (232.); ergo cylindrus iste erit omnium prismatum rectorum aequales cum ipso superficies integras habentium maximus. At prisma rectum est prismae quovis obliquo in eadem basi sub eadem conditione constituto majus (207.); ergo &c.

THEOREMA XXVIII.

251. Conus rectus, cujus altitudo diametri baseos duplum potest, minimam prae singulis omnium pyramidum regularium ipsi aequalium integris superficiebus suppetat integram superficiem.

Dem. Pyramidis ABGDE (Fig. 115.) basis BGDE aequalis, & concentrica in C coni AFNQ basi MFNQ & altitudo AC ponatur communis. Patet, baseos regularis BGDE latera circumferentiam MFNQ pluribus locis certa lege secare debere, ut in figura. Sit itaque ED unum ex lateribus dictae baseos secans circumferentiae portionem IQL in punctis I, L, & eidem lateri centro C agatur normalis CP, quae producta occurrat circumferentiae in Q.

Quoniam circulus MFNQ, & basis BGDE aequantur vocatis circumferentia X, & baseos perimetro Z, erit $CQ \cdot X = CP \cdot Z$, ex quo $CQ : CP = Z : X$; quia verò jectis AQ, AP, est $AQ > AP$, pone AH = AP, & connecte PH. Ob angulum PHQ obtusum, erit $PQ > HQ$ quare quum sit etiam $AP > CP$, habemus $HQ : AP$

$PQ : CP$, seu $\frac{HQ}{AP} < \frac{PQ}{CP}$; hinc $AQ : AP < CQ : CP$,

$\frac{AQ}{AP} < \frac{CQ}{CP}$, divisa enim AQ per AP, fit quotus 1

$\frac{HQ}{AP}$, & divisa CQ per CP, prodit $1 + \frac{PQ}{PC}$, adeoque

$1 + \frac{HQ}{AP} < 1 + \frac{PQ}{CP}$. Sed $CQ : CP = Z : X$; ergo $AQ : AP$

$< Z : X$, ac proinde $AQ \cdot X < AP \cdot Z$, nimirum coni AFNQ superficies est minor superficie pyramidis ABGDE. Verum si conus iste habeat altitudinem, quae diametri
ba.

baseos duplum possit, minima prae conis omnibus ipsi aequalibus afficitur superficie (244.); ergo &c.

THEOREMA XXIX.

252. *Conus rectus, cujus altitudo diametri baseos duplum potest, omnium pyramidum regularium aequalem cum ipsis superficiem integram habentium est maximus.*

Dem. In cono recto AFNQM (Fig. 115.), & pyramide regulari ABGDE superficies integrae sint aequales, & altitudo AC communis. Ducto radio CQ, qui latus DE secet ad angulos rectos in P, positaque circuli MN circumferentia = X, & polygoni regularis BD perimetro = Z, erit (AQ + QC). X = (AP + PC). Z, adeoque AQ + QC : AP + PC = Z : X; sed AQ > AP, ut hypothesis fervetur; ergo sumpta in AQ portione AH = AP, junctaque PH, erit AP : PC > HQ : IQ, & idcirco AP . PQ > PC . HQ.

Adde utrinque PC . PQ; fiet AP . PQ + PC . PQ > PC . HQ + PC . PQ; hinc PQ : PC > HQ + PQ : AP + PC; & componendo, CQ : CP > AQ + QC : AP + PC; ac proinde CQ : CP > Z : X, unde CQ . X > CP . Z. Sed altitudo AC est communis; ergo conus AFNQM est major pyramide regulari ABGDE. Quod si conus AFNQM talis assumatur, ut ejus altitudo diametri baseos duplum possit, hic erit omnium conorum (246.), ac multo magis omnium pyramidum regularium sub aequalibus superficiebus integris maximus. Q. E. D.

THEOREMA XXX.

253. *Cylindrus rectus, cujus altitudo baseos diametrum adaequat, singulis conorum omnium rectorum ipsi aequalium integris superficiebus minorem possidet integram superficiem.*

Dem. Sit cylindrus rectus ABDE (Fig. 116. 117.), cujus altitudo MC baseos diametrum BD adaequet; sit conus rectus FGKH, cujus altitudo FL duplum possit
baseos

baseos diametri GH. Erit (*ex hyp.*) $\overline{BD} = \frac{1}{3} \overline{GH}^2$. FL,
 sive $\overline{MC} = \frac{1}{6} \overline{FL}^3$, sive $6\overline{MC} = \overline{FL}^3$. Sed si foret $\overline{FL} =$
 $8\overline{MC}^3$, foret etiam $\overline{FL} = 2\overline{MC}$, quare quum sit $6\overline{MC} <$
 $8\overline{MC}^3$, erit $\overline{FL} < 2\overline{MC}$. Jam verò vocatis baseos cylin-
 dri circumferentia X, baseos conì circumferentia Z, erit
 integra cylindri superficies = $\overline{CD} \cdot X + \overline{MC} \cdot X$, & conì su-
 perfacies integra = $\frac{1}{2} \overline{LH} \cdot Z + \frac{1}{2} \overline{FH} \cdot Z$; sed ob $\overline{FH} =$
 $\overline{FL} + \overline{LH} = 8\overline{LH} + \overline{LH} = 9\overline{LH}$, fit $\overline{FH} = 3\overline{LH}$; ergo su-
 perfacies integra cylindri erit ad integram conì super-
 faciem, ut $3\overline{CD}$ ad $2\overline{LH}$, sive ut $3\overline{BD}$ ad $2\overline{GH}$, sive ut
 $3\overline{MC}$ ad $\overline{FL}$. Sed propter $6\overline{MC} = \overline{FL}^3$, stat $3\overline{MC} : \overline{FL} = \overline{FL} :$
 $2\overline{MC}$; ergo superficies integra cylindri ABDE est *minor*
 integra conì FGKH superficie. At conì FGKH super-
 facies integra est singulis omnium conorum rectorum ipsi
 aequalium superficiebus integris minor (244); ergo &c.

THEOREMA XXXI.

254. Cylindrus rectus, cujus altitudo baseos diametrum
 adaequat, est quocumque cono recto sub aequali superficie
 integra major.

Dem. Cylindri recti ABDE (*Fig. 116. 117.*) altitudo
 MC baseos diametrum BD adaequet, & conì recti FGKH
 altitudo FL baseos diametri GH duplum possit; praeter-
 ea tam cylindri, quam conì superficies integrae sint

aequales. Igitur $3\overline{MC} = \overline{FL}^2$ per superius (253.) demon-
 strata; quapropter si foret $4\overline{MC} = \overline{FL}^2$, foret etiam $2\overline{MC}$
 $= \overline{FL}$,

$\overline{MC}^2 = \overline{FL}$, sed $4\overline{MC}^2 > 3\overline{MC}^2$, ergo $2\overline{MC}^2 > \overline{FL}$, multoque magis $3\overline{MC}^2 > \overline{FL}$. Cylindrus autem est ad conum, ut $\overline{MC}^3$ ad $\frac{1}{3}\overline{GH}^2 \cdot \overline{FL}$, five ut $\overline{MC}^3$ ad $\frac{1}{6}\overline{FL}^3$, five ut $6\overline{MC}^3$ ad $\overline{FL}^3$, five ut $6\overline{MC}^3$ ad $3\overline{MC}^2 \cdot \overline{FL}$, five ut $3\overline{MC}^2$ ad $\overline{FL}$; ergo cylindrus ABDE est major cono FGKH. Sed conus FGKH est omnium conorum sub aequali superficie integra maximus (246.); ergo &c.

THEOREMA XXXII.

255. Cylindrus rectus, cujus altitudo baseos diametrum adaequat, minimam prae omnibus cylindris, prismatis, conis rectis, ac pyramidibus regularibus ipsi aequalibus exhibet integram superficiem.

Dem. Cylindrus, de quo est quaestio, minima prae omnibus cylindris, ac prismatis ipsi aequalibus superficie circumcluditur (230. 249.). Conus rectus, cujus altitudo diametri baseos duplum potest, minima prae omnibus conis rectis, & pyramidibus regularibus ipsi aequalibus praeditus est superficie (244. 251.). Sed cylindrus recensitus minorem habet quam dictus conus rectus integram superficiem [253.]; ergo &c.

THEOREMA XXXIII.

256. Cylindrus rectus, cujus altitudo baseos diametrum adaequat, est omnium cylindrorum, prismatum, conorum rectorum, ac pyramidum regularium sub aequali superficie integra maximus.

Dem. Cylindrus recensitus est omnium cylindrorum, ac prismatum sub aequali superficie integra maximus (232. 250.). Conus rectus, cujus altitudo diametri baseos duplum potest, est omnium conorum rectorum, ac pyra-

pyramidum regularium sub aequali superficie integra maximus (246. 252.). Sed cylindrus sub expressa conditione est quocumque cono recto sub aequali superficie integra major (254.); ergo &c.

T H E O R E M A XXXIV.

257. *Sphaera prae omnibus cylindris ipsi aequalibus minima afficitur superficie.*

Dem. Sit cylindrus MN (*Fig. 118.*), cuius altitudo EF baseos diametrum LN adaequet; sit sphaera ABD ipsi aequalis, cuius diameter AC, circulus maximus ABCD. Erit igitur circulus ABCD ductus in $\frac{2}{3}$ AC aequalis rectae EF ductae in basim HI; hoc est circuli ABCD circumferentia vocata X, baseos cylindricae HI circumferentia appellata Z, erit $\frac{1}{6} \overline{AC}^2 . X = \frac{1}{4} \overline{EF}^2 . Z$, ex quo elicitur $\frac{1}{6} AC . X : \frac{1}{4} EF . Z = EF : AC$. Sed sphaerae superficies = $AC . X$, & integra cylindri superficies = $\frac{3}{2} EF . Z$; ergo sumpta utriusque superficiei parte sexta, habemus $\frac{1}{6} AC . X : \frac{1}{4} EF . Z = EF : AC$, nimirum sphaerae ABD superficies erit ad integram cylindri MN superficiem, ut EF ad AC; est autem $EF < AC$; ergo sphaerae ABD superficies est *minor* superficie integra cylindri MN eidem aequalis. Jam verò cylindri, cuius altitudo baseos diametrum adaequat, superficies est minor quacumque cylindrorum ipsi aequalium superficie (230.); ergo &c.

T H E O R E M A XXXV.

258. *Sphaera est omnium cylindrorum aequales cum ipsa superficies integras habentium maxima.*

Dem.

Dem. Cylindri recti MN (*Fig. 118.*), cujus altitudo EF baseos diametrum LN adaequet, superficies integra superficiei sphaerae ABD sit aequalis. Quoniam cylindri basis HI est sexta pars superficiei sphaericae, sphaerae autem circulus maximus ABCD est ejusdem sphaericae superficiei pars quarta, cylindrus MN erit ad solidum ex dicto circulo ABCD ducto in $\frac{2}{3}$ EF, ut

$\frac{1}{6}$ EF ad $\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}$ EF, nempe in ratione aequalitatis. Sed sphaera ABD nequatur producto sui circuli maximi ABCD in $\frac{2}{3}$ AC, atque $AC > EF$ (secus cylindri superficies foret major superficie sphaerae contra hypothesim); ergo sphaera ABD, quae est major solido ex circulo ABCD ducto in $\frac{2}{3}$ EF, erit etiam major cylindro MN. Jam vero cylindrus MN est omnium cylindrorum sub aequali superficie maximus (232.); ergo &c.

T H E O R E M A XXXVI.

259. Sphaera prae solidis omnibus ipsi aequalibus minima superficie circumcluditur.

Dem. Quoniam polyedrum sphaerae inscriptum est sphaera minus, circumscriptum verò majus, si polyedrum sphaerae aequale habeat cum ea centrum magnitudinis commune; patet, quaelibet plana ejus superficiem componentia sphaerae superficiem secare debere. Diviso itaque polyedro in pyramides, & sphaera in totidem sectores respondentes, quorum vertices in communi centro coeant, sit DIEC (*Fig. 119.*) una ex dictis pyramidibus, cui respondeat aequalis sector AHBC. Perspicuum est, pyramidis altitudinem CI minorem esse debere sphaerae radio CH, qui sectoris sphaerici est altitudo. Est autem (*per hyp.*) basis sectoris ABC ad basim pyramidis DEC, ut CI ad CH; ergo sectoris sphaerici

rici basis erit minor basi pyramidis respondentis; quod quum de omnibus sectorum sphaericorum basibus comparate ad omnes respondentes pyramidum bases semper contingat, erit sphaerae superficies *minor* superficie polyedri cujuslibet ipsi aequalis.

Praeterea sphaera minimam prae cylindro quocumque ipsi aequali superficiem habet (257.); sed cylindrus rectus, cujus altitudo baseos diametrum adaequat, minimam prae omnibus cylindris, prismatis, conis rectis, ac pyramidibus regularibus ipsi aequalibus exhibet integram superficiem (255.); ergo &c.

THEOREMA XXXVII.

260. *Solidorum omnium sub aequali superficie integra maximum, seu capacissimum est sphaera.*

Dem. Si polyedrum sit sphaerae concentricum, quaecumque plana polyedri superficiem efficientia sphaericas portiones respondentes aliquo modo secabunt. Dividantur polyedrum in pyramides, ac sphaera in totidem sectores respondentes, sitque DIEC (*Fig. 119.*) una ex pyramidibus polyedrum constantibus, cui respondeat sector AHBC. Liquet, pyramidis altitudinem CI esse minorem sphaerae radio CH, qui est sectoris sphaerici altitudo. Sed ob aequales bases sector est ad pyramidem in ratione altitudinum; ergo sector sphaericus est major pyramide & ita semper; quamobrem tota sphaera erit *major* polyedro aequalem cum ipsa superficiem habente.

Insuper sphaera quorumcumque cylindrorum aequalibus cum ipsa superficiebus integris affectorum est maxima (258.); sed cylindrus rectus, cujus altitudo baseos diametrum adaequat, est omnium cylindrorum, prismaticum, conorum rectorum, ac pyramidum regularium sub aequali superficie integra maximus (256.); ergo &c.



DE MAXIMIS, ET MINIMIS

AD INSTITUTIONES GEOMETRICAS
ACCOMMODATIS

PARS SECUNDA

LIBER IV.

De Solidis

Solidis inscriptis, & circumscriptis

THEOREMA I.

261. **E**X omnibus superficiibus convexis cylindrorum cono recto inscriptorum, illa, cujus altitudo altitudinis conicae dimidium adaequat, est maxima.

Dem. Triangulum rectangulum, ex cujus revolutione circa axem conus rectus datus oritur, sit ABC (Fig. 120.) & DH, FI sint rectangula cylindros in revolutione circa axem AB gignentia, quorum FI habeat altitudinem FB subduplam altitudinis conicae AB. Superficies cylindrica convexa genita a rectangulo FI est ad superficiem convexam genitam a rectangulo DH, ut rectangulum FI ad rectangulum DH; sed $FI > DH$ (110.); ergo &c.

COROLLARIUM I.

262. Data quaelibet superficies cylindrica convexa evadere potest maxima prae omnibus superficiibus cylindricis convexis, quae cono alicui possunt inscribi. Etenim

nim si dicta superficies cylindrica oriatur ex revolutione rectanguli FI circa axem FB, producta BF in A, ita ut sit $AF = FB$, tum completo triangulo rectangulo ABC, cujus hypotenusa AC transeat per angulum G rectanguli FI, triangulum ACB simul cum rectangulo FI in gyrum ducatur circa axem AB, data superficies cylindrica convexa erit *maxima* omnium cylindricarum convexarum, quae dicto cono inscribi possunt.

COROLLARIUM II.

263. Si parallelepipeda, vel prismata basibus similibus incumbencia dictis cylindris ex trianguli ACB circa axem AB revolutione genitis inscribantur, idem de eorum superficiebus, quod de cylindricis statuimus, est pronuntiandum.

THEOREMA II.

264. Ex omnibus cylindris, qui cono recto inscribi possunt, ille, cujus altitudo tertiam altitudinis conicae partem adaequat, est maximus.

Dem. Esto ABC (Fig. 120.) triangulum rectangulum, ex cuius circa axem conversione datus conus exurgit, positaque BD tertia parte altitudinis AB, sint DH, FI rectangula, quae cum triangulo ABC rotata cylindros conflent. Cylindrus ex rectangulo DH erit ad cylindrum ex rectangulo FI, ut $BD \cdot \overline{DE}^2$ ad $BF \cdot \overline{FG}^2$; sed $\overline{DE}^2 = \overline{AD}^2 : \overline{AF}^2$; ergo cylindrus ex rectangulo DH erit ad cylindrum ex rectangulo FI, ut $\overline{AD}^2 \cdot DB$ ad $\overline{AF}^2 \cdot FB$; est autem $\overline{AD}^2 \cdot DB$ omnium $\overline{AF}^2 \cdot FB$ maximum (143.); ergo &c.

COROLLARIUM I.

265. Idem de prismatis pyramidi datae inscriptis sentien-
dum est; Etenim si per puncta D, F transire fingamus plana
basi BC pyramidis ACB parallela, & ex omnibus punctis
E, G sectionum inde prodeuntium ducantur ad dictam ba-
sim omnes EH, GI altitudini AB parallelae, orientur pri-
smata, quorum *maximum* erit illud, cuius altitudo BD
terciam altitudinis AB partem adaequat.

COROLLARIUM II.

266. Quilibet cylindrus evadere potest *maximus* cy-
lindrorum omnium, qui cono alicui recto inscribi possunt.
Cylindrus enim datus oriatur ex revolutione rectanguli
DO circa axem DB, producta BD in A, ita ut sit AB
tripla rectae BD, & juncta AL, quae protrahatur in M
ad occursum cum latere producto BO, si concipiatur,
triangulum rectangulum ABM rotari circa axem AB,
generabitur conus, in quo cylindrus ex DO erit *maxi-
mus*. Idem de prisma quolibet asseri potest ratione
habita ad pyramidem, dummodo in singulis prismatis ba-
sium similitudo servetur.

COROLLARIUM III.

267. Itaque si circa eandem altitudinem AB, cujus BD
sit pars tertia, fuerint plures trianguli rectanguli ABC
ABM, ABT, &c. ductisque basi BT parallelis DS, FR
secantibus latera AC, AM, AT, &c. in punctis G, E, K,
L, R, S, &c. ponantur omnia triangula revolvī circa axem
AB, liquet, aggregatum cylindrorum ex rectangulis DH,
DO, DQ, &c. esse *maius* aggregato cylindrorum ex re-
ctangulis FI, FN, FP, &c. Idem quoad prismata pyrami-
dibus rectis bases similes sub aequali altitudine habentibus
inscripta, ut supra (265.) monuimus, intelligendum.

COROLLARIUM IV.

268. Quae haecenus de cylindris demonstravimus (264.

266. 267.) locum obtinent etiam in conis cono recto inscriptis, sed verticem deorsum in centro baseos coni, cui inscribuntur, habentibus. Sic inter omnes conos ex triangulis BED, BGF cono ex triangulo ABC inscriptos, & vertices in baseos centro B ejusdem coni figentes, conus BED, cujus altitudo BD subtripulum adaequat altitudinis AB, est *maximus*; quod ad pyramides basibus similibus instructas, & conis hisce sic inscriptibiles, quin etiam ad pyramides pyramidibus eodem modo inscriptas, extenditur.

COROLLARIUM V.

269. Triangulum ABC (*Fig. 121.*) repraesentet conum, cui sit inscriptus maximus cylindrus DG. Habemus $AH:AI = BC:DE = 3:2$; sed cylindrus KC eandem habens cum cylindro DG altitudinem, & eandem basim cum cono ABC, est eidem cono aequalis; ergo cylindrus DG est ad conum ABC, ut $\overline{DE}^2$ ad $\overline{BC}^2$, hoc est ut 4 ad 9; quod quum valeat de omnibus cylindris maximis, qui conis inscribuntur, cylindri isti erunt hujusmodi conis proportionales.

COROLLARIUM VI.

270. Ducta ex puncto C (*Fig. 120.*) ad AB protraham recta quolibet CX, tum productis EH, GI usque ad ejusdem CX occursum in punctis V, Z, compleantur rectangula HY, IW. Quoniam $AB:BD = AC:CE = BC:CH = BX:BY$, erit $BY = \frac{1}{3} BX$, adeoque si imaginemur, triangulum BCX revolvi circa axem BX, cylindrus ex rectangulo HY erit prae omnibus cylindris ex ceteris rectangulis IW *maximus*, quod brevius per *num. 145.* evincitur. Quocirca si triangulum quodvis ACX, ex cujus vertice C cadat in basim non protensam normalis CB, concipiatur rotari circa dictam basim AX; inter omnes cylindros ex rectangulis quibuscumque triangulo ipsi

ipsi inscriptis, ac secum circumactis prodeuntes, ille, in quo baseos radius duas tertias partes occupat altitudinis ejusdem trianguli, erit *maximus*.

THEOREMA III.

271. *Inter omnes cylindros conis omnibus rectis aequali superficie integra tectis inscriptos; ille, cujus altitudo subduplum potest diametri baseos, est maximus.*

Dem. Finge, cylindrum, cujus altitudo diametri baseos sit potentia subdupla, esse conis alicujus recti maximum inscriptum; atque horum sectio communis per axem sit figura constans ex triangulo isoscele ABC (Fig. 121.), & rectangulo DG ipsi inscripto. Erit AI dupla

HI (264.), adeoque $\overline{AI}^2 = 4\overline{HI}^2$. Sed (ex hyp.) $\overline{HI}^2 = \frac{1}{2}\overline{DE}^2$, sive $4\overline{HI}^2 = 2\overline{DE}^2$; ergo $\overline{AI}^2 = 2\overline{DE}^2$, ac proinde $\overline{AH}^2$

$= 2\overline{BC}^2$. Conus igitur rectus, cujus sectio per axem triangulum ABC, est omnium conorum rectorum sub aequali superficie integra maximus (246.). At cylindri maximi sunt ut conis, quibus inscribuntur (269.); ergo cylindrus, cujus sectio rectangulum DG, est omnium cylindrorum maximorum conis rectis sub aequali superficie integra inscriptorum, adeoque & ceterorum *maximus*. Q. E. D.

THEOREMA IV.

272. *Solidis omnibus conicis ex triangulorum isoscelium circa bases circumactu coortis, & superficies aequales habentibus, cylindri recti concipiantur circumscripti. Inter hujusmodi solida sit ABPC (Fig. 121.) prodiens ex rotatione trianguli isoscelis ABP circa basim AP, quae octuplum possit altitudinis BH; dico, cylindrum rectum huic solido circumscriptum esse reliquorum maximum.*

H 3

Dem.

Dem. Solido $ABPC$ in duos conos rectos ABC , PBC similes & aequales secto, nec non ceteris conis eodem modo divisis, quum conorum ABC , PBC altitudines AH , PH duplum singulae possint baseos radij BH , isti coni aggregatum maximum component (242.); sed cylindri sunt conis, quibus circumscribuntur, proportionales; ergo &c.

T H E O R E M A V.

273. *Inter omnes cylindros solidis quibuscumque aequalibus a triangulorum isoscelium circa basim rotatione genitis circumscriptos; rectus ille, qui rhombo conico, seu solido conico altitudinem latitudini aequalem habenti, circumscribitur, minima operitur integra superficie.*

Dem. Cylindri solidis hisce conicis circumscripti sunt ut ipsa solida, ac proinde aequales; sed cylindrus rhombo conico circumscriptus altitudinem latitudini, seu baseos diametro, aequalem habet; ergo ex dictis (230.) res patet.

C O R O L L A R I U M

274. Si solida ista conica bifariam per latitudinem, ut diximus, dividantur; inter omnes cylindros conis aequalibus inde prodeuntibus circumscriptos, ille, qui cono altitudinem subduplam diametri baseos habenti circumscribitur, *minimo* praeditus est aggregato ex alterutra basi & superficie convexa. Et vicissim inter omnes conos cylindris superficies convexas simul cum alterutra ex basibus aequales habentibus inscriptos, ille, cujus altitudo est subdupla diametri baseos, est *maximus*.

T H E O R E M A VI.

275. Si triangulum rectangulum ABC (Fig. 122.) divisum in omnia inscripta rectangula DH , FI concipiatur revolvi circa PQ normali AB parallelam, ita ut innumeri oriantur cylindri recti concavi a dictorum rectangulorum

lorum revolutione geniti; ajo cylindrum illum concavum ex rectangulo DH, cujus basis BH ita secat BC in H, ut

fit $\overline{CH} = \frac{1}{3} \overline{BC}^2$, esse maximum.

Dem. Protracta BC in N, ut sit $CN = BC$, supra BN describatur semicirculus BPN, & GI, EH producantur usque ad occursum circumferentiae in punctis M, L. Constat, cylindrorum concavorum ex rectangulis FI, DH bases esse inter se, ut $\overline{BC} - \overline{IC}^2$ ad $\overline{BC} - \overline{HC}^2$, hoc est ut re-

ctang. BIN ad BHN, sive ut $\overline{IM}^2$ ad $\overline{HL}^2$. Ergo cylindri concavi ex rectangulis FI, DH erunt invicem, ut $\overline{IM}^2$ IG ad $\overline{HL}^2$. HE, sive ut $\overline{IM}^2$. IC ad $\overline{HL}^2$. HC. Sed si $\overline{CH} = \frac{1}{3} \overline{BC}^2$, productum LH. HC est maximum (156.); ergo cylindrus concavus ex circumactu dicti rectanguli DH est *maximus*. Q. E. D.

COROLLARIUM

276. Producta AB quomodocumque in O, junctaque OC, si fingamus, triangulum ACO revolvi ut supra circa PQ, semper verum reperietur, cylindrum concavum a rectanguli DR (cujus latus ER ita abscindit rectam CB, ut sit $\overline{CH} = \frac{1}{3} \overline{BC}^2$) revolutione genitum, esse *maximum*.

THEOREMA VII.

277. Inter omnes cylindros haemisphaerio inscriptos, ille, cujus altitudo radij subtriplum potest, est maximus.

Dem. Esto ABC (Fig. 123.) quadrans, cujus radius CB

CB ita secetur in F, ut sit $\overline{CF}^2 = \frac{2}{3} \overline{CB}^2$; completo rectangulo DF, & inscripto quadranti quovis alio rectangulo HG, fac, ut quadrans circa radium AC revolvatur. Cylindrus ex rectangulo DF erit ad cylindrum ex rectangulo HG, ut $\overline{CF}^2 \cdot FE$ ad $\overline{CG}^2 \cdot GI$; sed $\overline{CF}^2 \cdot FE > \overline{CG}^2 \cdot GI$ (148.); ergo cylindrus ex rectangulo DF est maximus; est autem $\overline{FE} = \frac{1}{3} \overline{CB}^2$ (per dem. l. cit.) ergo &c.

C O R O L L A R I U M

278. Ergo *maximus* quoque cylindrus sphaerae inscriptus haberi facile potest; id autem ex num. 151. ictu oculi obtinetur.

T H E O R E M A VIII.

279. *Inter omnes cylindros sphaerae inscriptos, ille, cujus altitudo radij sphaerae duplum potest, maxima obvolvitur convexa superficie.*

Dem. Esto ABC (Fig. 124.) semicirculus, ex cujus circa diametrum AC revolutione prodeat sphaera; sumptisque hic inde a centro O rectis aequalibus OD, OL, ita ut LD radij AO duplum possit, completoque rectangulo inscripto DF, aliud quodvis rectangulum HG eidem semicirculo inscribatur. Erit rectangulum DF dimidium quadrati circulo inscripti, quare si dictus semicirculus circa diametrum AC in orbem ducatur, cylindri a rectangulo DF geniti superficies convexa erit ad superficiem convexam cylindri geniti a rectangulo HG, ut rectangulum DF ad rectangulum HG; sed $DF > HG$ (131.); ergo &c.

T H E O R E M A IX.

280. *Inter omnia parallelepipeda, vel prismata ejusdem*

dem generis cylindris universis aequali superficie integra praeditis inscripta; regulare illud, quod cylindro recto baseos diametrum altitudini aequalem habenti inscribitur, est maximum.

Dem. Cylindrus rectus, cujus altitudo baseos diametrum adaequat, est omnium cylindrorum sub aequali superficie integra maximus (232.). Parallelepipeda, vel prismata ejusdem generis cylindris inscripta, basibusque similibus insistentia, sunt ut cylindri, quibus inscribuntur; adeoque inter huiusmodi parallelepipeda, vel prismata, illud, quod cylindro recto altitudinem baseos diametro aequalem habenti inscribitur, est *maximum*. Sed inter parallelepipeda, vel prismata ejusdem generis huic cylindro inscripta, regulare est maximum (177.); ergo &c.

T H E O R E M A X.

280. *Inter omnia ejusdem generis parallelepipeda, vel prismata regularia cylindris rectis aequalibus inscripta; illud, quod altitudinem habet duplam radij a centro polygoni (basim parallelepipedi, vel prismatis efficientis) ad ejusdem polygoni latus aliquod normalitereducti, minima obducitur integra superficie.*

Dem. Omnia huiusmodi parallelepipeda, vel prismata habent bases basibus cylindrorum proportionales, adeoque, ob altitudines aequales altitudinibus cylindrorum aequalium, sunt & ipsa invicem aequalia. Sed inter omnia parallelepipeda, vel prismata aequalia, regulare illud, cujus altitudo est dupla radij a centro baseos ad unum ex ejusdem lateribus normalitereducti, minima superficie integra comprehenditur (231.); ergo &c.

T H E O R E M A XI.

282. *Ex omnibus conis, qui dato segmento sphaerico inscribi possunt, rectus est maximus.*

Dem. Segmento sphaerico ABCD (Fig. 125.) inscribantur

bantur conus rectus $ABCD$, & obliquus quilibet $EBCD$; deinde per verticem A coni recti $ABCD$ transeat planum FG tangens sphaeram; tum supra eandem basim BCD concipiatur conus obliquus $HBCD$, in quo minima superficiei longitudo HD conveniat cum minima longitudo ED superficiei coni $EBCD$, cujusque vertex H sit in plano FG . Coni $ABCD$, $HBCD$ sub eadem basi, & altitudine sunt aequales; sed conus $HBCD$ est major cono comprehenso $EBCD$; ergo conus $ABCD$ est major cono $EBCD$. Q. E. D.

T H E O R E M A XII.

283. *Ex omnibus conis rectis sphaerae inscriptis, ille, cujus altitudo duas tertias diametri partes occupat, seu cujus altitudo baseos radij duplum potest, maxima superficiei convexa tegitur.*

Dem. Semicirculus, ex cujus circa diametrum revolutione data sphaera progignitur, sit $ACEB$ (*Fig. 77.*), sumptaque in diametro AB recta AD dupla remanentis DB , ex punctis D , F excitentur ad circumferentiam normales DC , FE , junctisque AC , AE , rotetur figura circa diametrum AB . Superficies convexa coni ex triangulo ADC est ad superficiem convexam coni ex triangulo AFE , ut $AC \cdot CD$ ad $AE \cdot EF$; sed $AC \cdot CD > AE \cdot EF$ (142.); ergo &c.

T H E O R E M A XIII.

284. *Ex omnibus conis sphaerae inscriptis, ille, cujus altitudo duas tertias diametri partes continet, sive ille, cujus altitudo duplum potest radij baseos, est maximus.* æ

Dem. Eadem *fig. 77.* (ut in *Theor. antec.*) constructione retenta, liquet, conum rectum ex triangulo ADC esse ad conum rectum ex triangulo AFE , ut $AD \cdot \overline{DC}^2$ ad $AE \cdot \overline{EF}^2$

ad $AF \cdot \overline{FE}$; sed $AD \cdot \overline{DC} > AF \cdot \overline{FE}$ (144.); ergo conus ex triangulo ADC , cujus altitudo AD duplum potest baseos radij DC , est *major* cono quovis ex triangulo AFE . Conus autem ex triangulo AFE est *major* quocumque cono obliquo, qui eidem segmento sphaerico inscribi potest (282.); ergo &c.

THEOREMA XIV.

285. *Ex omnibus conis rectis haemisphaerio inscriptis, ac vertices in centro habentibus, ille, in quo altitudo radii sphaerae subtriplum potest, est maximus.*

Dem. Esto circuli quadrans $AEBC$ (Fig. 123.), cuius radio AC ita secto in D , ut sit $3\overline{CD}^2 = \overline{AC}^2$, excitentur ex D , & ex alio quovis puncto H ad circumferentiam normales DE , HI ; tum junctis CE , CI , imaginare, figuram rotari circa axem AC . Ex triangulis cum quadrante rotatis CED , CIH conii orientur habentes pro superficiei convexae longitudinibus radios CE , CI , adeoque superficiei convexae longitudines erunt aequales; sed $\overline{CE}^2 = \overline{CA}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{DE}^2 = 3\overline{CD}^2$; ergo erit $\overline{DE}^2 = 2\overline{CD}^2$; ille autem ex omnibus conis rectis superficiei convexae longitudines aequales habentibus est maximus, in quo baseos radius duplum potest altitudinis (248.). ergo &c.

THEOREMA XV.

286. *Ex omnibus conis rectis cylindro recto circumscriptis, ille, cujus altitudo triplam inscripti cylindri altitudinem adaequat, est minimus.*

Dem. Cylindro recto AB (Fig. 126.) circumscribantur conii recti CDE , FGH , sitque conii CDE altitudo CI tripla altitudinis KI cylindri inscripti AB . Unusquisque co-
nus

nus est ad maximum inscriptum cylindrum in ratione constanti, nimirum ut 9 ad 4 (269.); sed cylindrus AB est maximus cylindrorum cono CDE inscriptorum (264.), & non maximus cylindrorum cono FGH inscriptorum; ergo conus CDE cylindro AB minorem habebit rationem quam conus FGH, adeoque conus CDE *minor* erit cono FGH, & ita semper Q. E. D.

T H E O R E M A XVI.

287. Ex omnibus conis rectis circumscriptis cylindro DG (Fig. 121.) altitudinem HI talem habenti, ut duplum ejus quadrati quadratum $\overline{DE}^2$ diametri baseos adaequet; ille, cujus altitudo AH sit tripla altitudinis HI, minima afficitur integra superficie.

Dem. Quoniam $AH = 3HI$, erit $AI = 2HI$, & $\overline{AI}^2 = 4\overline{HI}^2 = 2\overline{DE}^2$ (ex hyp.), quare $\overline{AH}^2 = 2\overline{BC}^2$, adeoque conus ABC minimam prae omnibus aequalibus habet integram superficiem (244.). Sed idem conus ABC est omnium conorum rectorum cylindro DG circumscriptorum minimus (286.); ergo minimam potiori jure habebit prae omnibus conis rectis cylindro DG circumscriptis superficiem. Q. E. D.

T H E O R E M A XVII.

288. Inter omnes conos rectos cylindris omnibus rectis aequalibus circumscriptos, ille, qui inscriptum habet maximum cylindrum ejus naturae, ut quadratum altitudinis bis sumptum diametri baseos quadratum adaequet, minima superficie integra comprehenditur.

Dem. Conus, qui maximum enunciatur cylindrum inscriptum habet, praeditus est altitudine baseos diametri potentia dupla (per dem. in Theor. antec.); quomobrem

brem si ponas, aequales cylindros esse conis maximos inscriptos, coni isti erunt aequales (269.), adeoque conus, qui cylindrum recensitum inscriptum habet, *minima* prae ceteris afficitur integra superficie (244.). Sed si aequales cylindri non sint conis maximi inscripti, coni isti erunt dicto cono maiores (285.), ac propterea multo magis conus hicce *minima* superficie integra prae ijs donabitur. Quod si ad conos rectos dicto cylindro circumscriptos animum convertamus, isti *maiores* dicto cono superficiem integram sufficient (287.); ergo &c.

THEOREMA XVIII.

289. *Inter omnes conos rectos cylindris quibuscumque rectis aequalibus circumscriptos; ille, qui habet inscriptum maximum cylindrum ejus naturae, ut quadratum altitudinis bis sumptum radij baseos quadratum adaequet, minima obvolvitur convexa superficie.*

Dem. Conus, cui dictus cylindrus est inscriptus, altitudinem habet, quae baseos radij duplum potest (*per dem. similem demonstr. num. 287.*). Imaginare nunc, omnes cylindros aequales conis inscriptos esse maximos. Hujusmodi coni erunt & ipsi aequales (269.), proptereaque conus, qui cylindrum enunciatum habet inscriptum, *minima* prae reliquis obducetur superficie convexa (240.). Jam vero si dicti cylindri aequales non sint maximi inscripti conis, isti coni erunt recensito cono maiores, adeoque iste conus *minima* potiori jure superficie convexa prae illis contegetur. Denique si omnes coni recti statuto cylindro circumscripti ad examen revocentur, conus ille, cui maximus hic cylindrus inscribitur, erit omnium minimus (286.), ac proinde *minima* multo magis superficie convexa afficietur (240.); ergo &c.

THEO.

THEOREMA XIX.

290. Triangulo isosceli ABP (Fig. 121.), cujus altitudo BH, sit inscriptum rectangulum DQ altitudinis $FH = \frac{2}{3} BH$, ac postmodum revolvatur figura circa basim AP, ut oriatur solidum conicum ABPC cylindro DN circumscriptum; ajo, ex omnibus solidis conicis sic enatis, eidem cylindro DN circumscriptis, & contactus velut B, C cum planis tam ultra, quam citra plana RCS, TBV (parallela plano per dictam basim AP ad angulos rectos cum altitudine BH transeunti) habentibus, solidum recensitum ABPC esse minimum.

Dem. Cylindrus DN est maximus inscriptus solido conico ABPC (270.), adeoque non maximus inscriptus solidis conicis eidem cylindro circumscriptis, & ex triangulorum isoscelium revolutione confurgentibus; quare solidum ABPC ad cylindrum DN minorem habebit rationem quam quodvis aliud nominatum solidum conicum; ac proinde solidum ABPC erit ex iis omnibus minimum. Sed per ea quae num. 117. demonstrata fuere, omnia hujusmodi solida cylindro DN circumscripta, quae aequales habent latitudines, quaeque a triangulis isoscelijs ortum non ducunt, sunt singula aequalia solido a triangulo isoscele aeque alto genita; ergo &c.

THEOREMA XX.

291. Si triangulo isosceli ABP (Fig. 121.) sit inscriptum rectangulum DQ ejus naturae, ut altitudinis FH quadratum bis sumptum baseos diametri IQ quadratum adaequet, ac deinde figura circa basim AP tanquam axem revolvatur; non solum ex omnibus solidis conicis ex triangulorum quorumcumque revolutione prodeuntibus, ac cylindro eidem DN circumscriptis, sed ex omnibus quoque hujusmodi solidis circumscriptis cylindro cuilibet aequali cylin-

cylindro DN, solidum ABPC minima operietur superficie.

Dem. Si triangula rectangulo DQ circumscripta, unaque cum ipso circa bases rotata sint isoscelia, ex dictis (289.) res patet, solidum enim ABPC constat duobus conis aequalibus, & similibus ABC, PBC minima superficie convexa praeditis, eidemque basi perfecte adhaerentibus. Si dicta triangula sint scalena, considerentur duo triangula aequae alta rectangulo DQ circumscripta, quorum alterum sit isosceles; istud, basi etiam excepta, minimam habebit perimetrum (117.); quamobrem instituta, ut ante, hujusmodi triangulorum circa bases revolutione, superficies solidi conici a triangulo isoscele geniti erit minima, superficies enim istae sunt ut dictae triangulorum rotatorum perimetri, basibus non computatis.

Idem demonstrabitur in solidis omnibus conicis cuilibet cylindro cylindrum DN adaequante circumscriptis. Sed solidi conici ABPC superficies a triangulo ABP statutae conditionis circa basim AP revoluto genita est minor superficie solidorum quorumcumque tam cylindro DN, quam cylindris ipsi aequalibus circumscriptorum, & a triangulis isoscelijs circa bases revolutis effectorum (289.); ergo &c.

T H E O R E M A XXI.

292. *Ex omnibus solidis conicis sphaerae inscriptis, rhombus conicus maxima cum superficie, tum soliditate pollet.*

Dem. Ponatur, semicirculum ACFI (Fig. 69.) habentem inscripta triangula quotlibet ACI, AFI, quorum AFI sit isosceles, rotari circa diametrum AI. Superficies solidorum conicorum sphaerae hinc emergentis inscriptorum erunt ut $(AF + FI) \cdot FG$, $(AC + CI) \cdot CH$; sed $AF + FI > AC + CI$ (128.) & $FG > CH$; ergo rhombus conicus a triangulo isoscele AFI circumactio genitus maximam suppetat superficiem; quod erat primum.

Rhombus conicus maximam prae ceteris solidis habet

latitudinem sub communi altitudine AI, ut patet; ergo erit omnium hujusmodi solidorum *maximus*, singula enim ista solida dividuntur in duos conos basibus aequalibus praeditos; *quod erat secundum*.

THEOREMA XXII.

293. *Ex omnibus conis haemisphaerio circumscriptis, ille, cujus altitudo radij baseos duplum potest, minimam habet superficiem convexam.*

Dem. Hujusmodi conorum, & inscripti haemisphaerij sectio communis per axem repraesentetur per triangula isoscelia ABD, EFG (*Fig. 127.*), ac per semicirculum inscriptum MRN, trianguli vero ABD altitudo AC duplum possit baseos dimidia CB. Contactuum H, L punctis H, L junctis cum centro C per radios HC, LC, quoniam triangula rectangula ABC, EFC habent aequales perpendiculares ex vertice communi C in hypotenusas AB, EF demissas, erit $AB \cdot BC < EF \cdot FC$ (154.); sed in eadem ratione sunt superficies convexae conorum ex triangulorum ABC, EFC circa axem AC revolutione genitorum; ergo conus ex triangulo ABC *minorem* habet quam conus ex triangulo EFC superficiem convexam. Q. E. D.

THEOREMA XXIII.

294. *Ex omnibus conis haemisphaerio circumscriptis, ille, cujus altitudo radij baseos duplum potest, est minimus.*

Dem. Sint coni ABD, EFG (*Fig. 127.*) haemisphaerio MLN circumscripti, atque in cono ABD sit $\overline{AC}^2 = 2\overline{BC}^2$. Erit primus conus ad alterum, ut $AC \cdot \overline{CB}^2$ ad $EC \cdot \overline{CF}^2$, five ut $AB \cdot BC \cdot CH$ ad $EF \cdot FC \cdot CL$, five ob $CH = CL$, ut $AB \cdot BC$ ad $EF \cdot FC$; sed $AB \cdot BC < EF \cdot FC$ (154.); ergo conus ABD *minor* cono EFG. Q. E. D.

THEO-

THEOREMA XXIV.

295. Circumscriptis semicirculo PMT (Fig. 129.) quibuscumque triangulis ABR, WXZ, inter quae isosceles ABR habeat basim AR altitudini BG potentia octuplam, si tota figura circa axem AR in orbem agatur; ex omnibus solidis conicis sphaerae circumscriptis hinc exurgentibus, illud, quod a triangulo ABR progignitur, minima tam superficie, quam soliditate comprehenditur.

Dem. Si triangula ABR, WXZ sint isoscelia, ex antecedentibus (293. 294.) res patet. At si huiusmodi triangulorum alterum WXZ sit scalenum, ponamus, hoc aequalem habere cum triangulo isoscele ABR altitudinem. Quoniam triang. ABR $\triangleleft$ WXZ (159.), erit $AB + BR \triangleleft WX + XZ$ (ibid.), adeoque superficies solidi ex triangulo isoscele ABR erit minor superficie solidi ex triangulo scaleno WXZ; & sic de ceteris. Ergo patet primum.

Similiter si statuatur, triangulum quodvis scalenum WXZ circumagi ut supra cum triangulo isoscele ABR aequali altitudine BG affecto, ob triang. ABR $\triangleleft$ WXZ erit $AR \triangleleft WZ$, ac proinde solidum ex triangulo isoscele ABR erit minus solido ex triangulo scaleno WXZ, & sic semper. Ergo patet secundum.

LEMMA

296. Solida quaecumque ita sphaerae circumscripta, ut omnia plana, quae terminantur, sphaeram tangent, sunt suis superficiebus proportionalia.

Dem. Sphaerae HMN (Fig. 128.), cujus centrum C, radius CH, concipe circumscriptum solidum planis quocumque, & quibuscumque sphaeram tangentibus terminatum, quorum unum sit ABD. Per huius latera AB, AD, BD traducantur totidem plana per centrum C trans-euntia, & sic de ceteris. Totum solidum in tot pyramides, quot sunt plana ABD illud undique claudencia

resolvetur, quae pyramides quum vertices habeant in centro C, eadem omnes altitudine CH gaudebunt. Aggregatum igitur omnium pyramidum, hoc est solidum ipsum circumscriptum, erit aequale producto ex tota sua superficie in radij trientem. Idem demonstrabitur de quovis alio solido sphaerae eidem HMN circumscripto; quare liquet, huiusmodi solida esse invicem, ut eorum superficies. Q. E. D.

C O R O L L A R I U M

297. Vi ejusdem ratiocinii liquet, solidum quodvis sphaerae dicta conditione circumscriptum esse ad eandem sphaeram, ut illius ad hujus superficiem.

T H E O R E M A XXV.

298. *Ex omnibus conis sphaerae circumscriptis, ille, cujus altitudo duplam sphaerae inscriptae diametrum aequat, vel cujus altitudo diametri baseos duplum potest, tam soliditatem, quam superficiem minimam habet.*

Dem. Coni CDE (Fig. 126.), cujus altitudo CI, & sphaerae ipsi inscriptae AINM, cujus diameter IM = MC, sectio per axem sit DCE. Si in latere CD sumatur AD = DI, & ex A erigatur normalis AP occurrens altitudini CI in P, patet, semicirculum triangulo CID inscriptum transire per puncta I, A, M, & P esse ipsius centrum. Praeterea quum triangula similia CAP, CID exhibeant CP : PA = CD : DI, sitque CP tripla PA, erit

CD tripla tam DI, quam DA, ex quo prodit $\overline{CI}^2 =$

$8\overline{DI}^2 = 2\overline{DE}^2$. Triangulo CID inscribe rectangulum AKIL, quod ex altitudine CI tertiam rescindet partem KI; quare tota figura circa axem CI in orbem ducta, exurget conus CDE, in quo locus contactuum tam sphaerae, quam cylindri erit eadem circumferentia ambiens cylindri basim, cujus diameter AN. Est autem AP > AK, ergo
sphae-

sphaera $AINM$ secat cylindrum AB , proptereaue conorum sphaerae $AINM$ circumscriptorum longitudines, excepta CD , cadent extra dictum locum contactuum, adeoque coni isti erunt semper majores conis respondentibus, qui cylindro AB sub eadem altitudine, vel sub eadem basi circumscribantur. Sed conus CDE est ex omnibus conis cylindro AB circumscriptis minimus (286.) ergo *minimus* erit potiori jure omnium conorum sphaerae circumscriptorum; *quod erat primum*, quodque etiam per num. 173. 174. ostendi poterat.

Solidorum sphaerae circumscriptorum superficies sunt ut ipsa solida (296.); sed coni haberi possunt pro pyramidibus, quarum bases sint polygona regularia laterculis summe exiguis conflata, ex quo fit, ut triangulis angustissimis extra bases illae contegantur; ergo quum omnia ista triangula sphaeram contingant, conorum sphaerae circumscriptorum superficies erunt ut ipsi coni, adeoque conus altitudine dupla diametri sphaerae inscriptae praeditus *minima* superficie integra clauditur; *quod erat secundum*.

T H E O R E M A XXVI.

299. *Inter omnia haemisphaeria conis aequali superficie convexa obductis inscripta, illud, quod cono altitudinem potentia duplam radij baseos habenti inscribitur, est maximum.*

Dem. Triangula AGB , DHE (Fig. 129. 130.) rectangula in G , H , quibus quadrantes circulares IMP , LNQ sint inscripti, habeant producta AB , BG , DE , EH invicem aequalia, & in triangulo AGB sit $\overline{AG} = 2\overline{GB}$. Quadrans IMP major erit quadrante LNQ (154.); ergo figuris hisce circa axes AG , DH rotatis, haemisphaerium $IMPK$ cono ABC inscriptum *majus* erit haemisphaerio $LNQO$ cono DEF inscripto, atque isti coni superficiebus curvis aequalibus gaudebunt. Q.E.D.

THEOREMA XXVII.

300 *Inter omnia haemisphaeria conis aequalibus inscripta, illud, quod cono altitudinem potentia duplam radij baseos habenti inscribitur, est maximum.*

Dem. Triangula AGB, DHE (Fig. 129. 130.) rectangula in G, H, habeant $AG \cdot \overline{BG}^2 = DH \cdot \overline{EH}^2$, & in triangulo AGB sit $\overline{AG}^2 = 2 \overline{BG}^2$. Demissis ex angulis rectis G, H super hypotenusas AB, DE normalibus GM, HN, propter $AG \cdot \overline{BG}^2 = DH \cdot \overline{EH}^2$, erit etiam $AB \cdot BG \cdot GM = DE \cdot EH \cdot HN$; ex quo $DE \cdot EH : AB \cdot BG = GM : HN$. Est autem $DE \cdot EH > AB \cdot BG$ (240.); ergo $GM > HN$; sed GM, HN sunt radij haemisphaeriorum conis ABC, DEF inscriptorum, si triangula AGB, DHE circa axes AG, DH una cum quadrantibus GPI, HQL revolvi concipiantur; ergo &c.

THEOREMA XXVIII.

301. *Inter omnes sphaeras PMTK, QNVO (Fig: 129. 130.) solidis quibuscumque conicis ABRC, DESF tam aequalibus, quam superficies aequales habentibus, & ex triangulorum ABR, DES circa bases AR, DS circumactu coortis, inscriptas; illa, quae inscribitur solido ABRC genito a triangulo isoscele ABR rotato circa basim AR potentia aequalem octuplo altitudinis BG, est maxima.*

Dem. Si triangula ABR, DES semicirculis PMT, QNV circumscripta sint isoscelia, ex dictis (299. 300.) res patet. Sin autem non sint isoscelia, assumatur triangulum quovis scalenum WXZ (Fig. 129.) semicirculo PMT haemisphaerij disssectione orto circumscriptum, aequalem habens cum isoscele aliquo ABR altitudinem. Quoniam triang. $WXZ > ABR$ (159.), erit $WZ > AR$, adeo-

adeoque solidum conicum ex triangulo WXZ erit majus solido conico ex triangulo ABR; quamobrem ut stet hypothesis, primum solidum immui debet, ac proinde sphaera ipsi inscripta debet esse minor sphaera PMTK. Idem multò magis eveniet in *fig. 130*; ergo si solida conica sint aequalia, sphaera solido conico ABRC allata proprietate praedito inscripta erit *maxima*; quod erat primum.

Semicirculo PMT (*Fig. 129.*) circumscribatur, ut supra, triangulum quodvis scalenum WXZ aequali gaudentes cum alio isoscele ABR altitudine. Ob triang. WXZ > ABR, erit $WX + XZ > AB + BR$ (159.), quocirca superficies solidi ex triangulo WXZ erit major superficie solidi ex triangulo ABR, ad hypothesein igitur servandam, oportet, ut solidum ex triangulo WXZ minus evadat, ex quo sequitur, sphaeram huic solido inscriptam *minorem* esse debere quam sphaera PMTK; quod erat secundum.

C O R O L L A R I U M

302. Hinc inter universa solida conica modo exposito genita ABRC, DESF (*Fig. 129. 130.*) sphaeris aequalibus PMTK, QNVO, vel sphaerae eidem circumscripta; illud ABRC, quod prodit ex trianguli isoscelis ABR rotatione circa basim AR potentia aequalem octuplo altitudinis BG, *minimam* cum soliditatem, cum superficiem exhibebit.

L E M M A.

303. In duobus solidis similibus, superficies majoris ad minoris superficiem minorem habebit rationem quam solidum majus ad minus, & contra.

Dem. Superficies sunt ut quadrata laterum homologorum in solidis similibus, solida vero sunt ut eorundem laterum cubi. Itaque majoris lateris homologi numerum

exprimat A, minoris B; dico, esse $A : B \leq A : B$. Divi-

dantur antecedentes per A , consequentes per B ; fiet $1 : 1 < A : B$ propter $A > B$; ergo &c.

THEOREMA XXIX.

304. *Inter omnes sphaeras conis aequalibus inscriptas, illa, quae cono altitudinem potentia duplam diametri baseos habenti inscribitur, est maxima.*

Dem. Sint duo conae aequales ABED, FHML (Fig. 113. 114.), sed conus ABED minorem habeat superficiem integram quam conus FHML, iisque inscriptae ponantur sphaerae CKN, IRS. Liquet, superficiem conae ABED ad conae FHML superficiem, minorem habere rationem quam conus ABED ad conum FHML. Sed conae superficies est ad sphaerae inscriptae superficiem, ut conus ad ipsam sphaeram (296.) ergo facili adhibito ratiocinio, superficies sphaerae CKN ad superficiem sphaerae IRS minorem habebit rationem quam sphaera CKN ad sphaeram IRS, adeoque sphaera CKN major sphaera IRS (303.). Quapropter si inter omnes conos rectos aequales conus ABED minimam habeat superficiem integram, sphaera inscripta CKN erit maxima. Sed conus iste hujusmodi proprietate gaudet, cum ejus altitudo diametri baseos duplum potest (244.); ergo &c.

THEOREMA XXX.

305. *Inter omnes sphaeras conis aequali superficie integra obvolutis inscriptas; illa, quae cono altitudinem potentia duplam diametri baseos habenti inscribitur, est maxima.*

Dem. Conis ABED, FHML (Fig. 113. 114.) superficiibus integris aequalibus circumseptis sint inscriptae sphaerae CKN, IRS. Si conus ABED ponatur major cono FHML, erit ad hunc in majori ratione quam illius su-

superficies integra ad istius integram superficiem. Sed conus est ad sphaeram inscriptam, ut coni superficies integra ad sphaerae inscriptae superficiem (296.); ergo sphaera CKN erit ad sphaeram IRS in majori ratione quam ejus ad hujus superficiem, ac proinde sphaera CKN major sphaera IRS (303.). Itaque si conus ABED sit omnium conorum superficies integras aequales possidentium maximus, sphaera etiam CKH erit omnium sphaerarum IRS *maxima*. At conus hujusmodi est tali proprietate praeditus cum ejus altitudo baseos diametri duplum potest (246.); ergo &c.

THEOREMA XXXI.

306. *Inter omnes sphaeras cylindris aequalibus circumscriptas, illa, quae cylindro, cujus altitudo subduplum potest radij baseos, circumscribitur, est minima.*

Dem. Circuli diametro AB (Fig. 77.) ita diviso in D, ut sit $AD = 2DB$, ac tam ex puncto D, quam ex alio quovis F erectis usque ad circumferentiam normalibus DC, FE, jungantur CB, EB. Demonstravimus (248.), conum ex revolutione trianguli BAC circa axem BC esse majorem quolibet cono ex revolutione trianguli BAE circa axem BE. Itaque si AE producat in M, ita ut excitata normali MO occurrente diametro AB in O, triangulum OAM exurgat, ex cujus circa axem OM revolutione oriatur conus aequalis dicto cono ex triangulo BAC, patet, longitudinem AB superficiei convexae in cono ex triangulo BAC esse minorem longitudine AO superficiei convexae in recensito cono aequali ex triangulo OAM, & ita semper. Sed in cono ex triangulo BAC habemus

$\overline{AC}^2 = 2\overline{BC}^2$ (*ibid.*) sive $\overline{BC}^2 = \frac{1}{2}\overline{AC}^2$; ergo ex omnibus conis aequalibus, ille, cujus altitudo radij baseos subduplum potest, minima superficiei convexae longitudine afficitur. Jam verò si cylindros concipiamus, in quibus basium diametri sint AC, AM, altitudines CB, MO, isti cylin-

cylindri erunt aequales & diagonalis AB erit omnium AO minima; ergo quum sphaerarum ACEB, ALMO cylindris hisce circumscriptarum diametri sint AB, AO, sphaera cylindro, cujus altitudo radij baseos subduplum potest, circumscripta, erit *minima*. Q. E. D.

THEOREMA XXXII.

307. *Inter omnes sphaeras conis rectis aequali superficie convexa tectis circumscriptas, illa, quae cono altitudinem potentia duplam radii baseos habenti circumscribitur, est minima.*

Dem. Conis rectis ABRC, DESF (Fig. 79. 80.) aequali superficie convexa praeditis, in quibus basium radij GB, HE, altitudines AG, DH, sint circumscriptae sphaerae ABIC, DELF, quarum diametri AI, DL, & in cono

ABRC sit $\overline{AG}^2 = 2\overline{BG}^2$. Ob superficies convexas aequales, habemus $AB \cdot BG = DE \cdot EH$, unde $AB : DE = EH : BG$,

pariterque $\overline{AB}^2 : \overline{DE}^2 = \overline{EH}^2 : \overline{BG}^2$, sive $AI \cdot AG : DL \cdot DH =$

$\overline{EH}^2 : \overline{BG}^2$, quare ducendo antecedentes in DH, & conse-

quentes in AG, fiet $DH \cdot \overline{EH}^2 : AG \cdot \overline{BG}^2 = AI \cdot AG \cdot DH :$

$DL \cdot AG \cdot DH = AI : DL$. Sed $DH \cdot \overline{EH}^2 > AG \cdot \overline{GB}^2$ (242.); ergo $AI < DL$, & ita semper, adeoque sphaera ABIC est *minima*. Q. E. D.

THEOREMA XXXIII.

308. *Inter omnes sphaeras conis rectis aequalibus circumscriptas, illa, quae cono altitudinem potentia duplam radii baseos habenti tircumscribitur, est minima.*

Dem. Conis rectis aequalibus ABRC, AESF (Fig. 79. 80.), quorum altitudines AG, DH, basium radij GB, HE
circum

circumscriptae sint sphaerae ABIC, DELF, quarum dia-

metri AI, DL, & in cono ABRC ponatur $\overline{AG}^2 = 2\overline{BG}^2$. Erit igitur $AB \cdot BG < DE \cdot EH$ (240.), quare $AB : DE < EH :$

BG , & $\overline{AB}^2 : \overline{DE}^2 < \overline{EH}^2 : \overline{BG}^2$, sive $AI \cdot AG : DL \cdot DH <$

$\overline{EH}^2 : \overline{BG}^2$. Multiplicentur antecedentes per DH, & consequentes per AG, erit $AI \cdot AG \cdot DH : DL \cdot AG \cdot DH <$

$DH \cdot \overline{EH}^2 : AG \cdot \overline{BG}^2$, sive $AI : DL < DH \cdot \overline{EH}^2 : AG \cdot \overline{BG}^2$;

sed (*ex hyp.*) $DH \cdot \overline{EH}^2 = AG \cdot \overline{BG}^2$; ergo $AI < DL$, adeoque sphaera ABIC minor sphaera qualibet DELF. Q. E. D.





ADDITAMENTUM

309. **O** Pere exacto, aliquot mihi in mentem venit Theorematum maxime generalium ad Geometriam sublimiorem spectantium, quae in hoc additamento collocare ab utilitate non alienum duxi, ut ostenderem, huiusce Operis, licet elementaris, Theoremata, vel ijs similia ad res geometricas altioris etiam indaginis extendi posse. Sit itaque

THEOREMA I.

310. *Sec̄ta* AB (Fig. 37.) *bifariam* in C, & non *bifariam* in D; dico, fore $2\sqrt[m]{AC} < \sqrt[m]{AD} + \sqrt[m]{DB}$, intelligendo pro m numerum quemvis integrum affirmativum unitate majorem.

Dem. Quoniam $AD = AC + CD$, $DB = AC - CD$, sumptis harum radicum potestatibus quibuscumque, factaque deinde ipsarum summa, Theorematis veritas semper constabit. Sic si hujusmodi radicum quarta accipiatur po-

testas, earum summa erit $2\sqrt[4]{AC} + 12\sqrt[2]{AC} \cdot \sqrt[2]{CD} + 2\sqrt[4]{CD} = \sqrt[4]{AD} + \sqrt[4]{DB}$; adeoque $2\sqrt[4]{AC} < \sqrt[4]{AD} + \sqrt[4]{DB}$, & ita semper; ex permutatione siquidem signorum in duabus radicum potestatibus aliquid semper residui superesse debet praeter duplum potestatis AC, quaecumque sit haec potestas; ergo generatim $2\sqrt[m]{AC} < \sqrt[m]{AD} + \sqrt[m]{DB}$. Q. E. D.

THEO.

THEOREMA II.

311. Sit quaelibet potestatum ejusdem generis invicem aequalium series; sit alia series aequinumerica potestatum potestatibus primae seriei homogenearum non omnium invicem aequalium, cum hac conditione, ut radicum utriusque seriei aggregata sint aequalia; dico, potestatum invicem aequalium aggregatum esse minimum.

Dem. Si negas; in serie potestatum non omnium aequalium sint saltem duae potestates inaequales A, B . Aequales inter se concipe duas alias potestates dictis potestatibus homogeneas, puta R, R , quarum radices $R + R$ adaequent radices $A + B$, erit $2R < A + B$ (304.); ergo potestatum non omnium aequalium series minimum non exhibet aggregatum contra hypothesein, & sic semper, quousque omnes & singulae seriei potestates invicem aequales statuuntur. Q. E. D.

COROLLARIUM

312. Ergo si recta sit in quotlibet partes omnes invicem aequales, nec non in totidem partes non omnes invicem aequales divisa, potestates ejusdem generis partium invicem omnium aequalium minimum conflant aggregatum.

THEOREMA III.

313. Expriment m, n numerum quemlibet integrum affirmativum, sed n sit semper unitate major, & recta AB (Fig. 37.) ita secetur in C , ut sit $CB = \frac{1}{m+1} AB$;

sum.

sumpto quovis alio puncto D, ajo, fore $\overline{AC}^{\frac{n}{m}} + m^{\frac{n-1}{m}} \overline{CB}^{\frac{n}{m}}$
 $< \overline{AD}^{\frac{n}{m}} + m^{\frac{n-1}{m}} \overline{DB}^{\frac{n}{m}}$.

Dem. Positis $m=2, n=4$, fiet $CB = \frac{1}{3} AB$. Imaginare nunc AC per m , seu bifariam divisam; comprehendet ista sexdecim quadrato-quadrata invicem aequalia, quorum radices simul sumptae octuplum ipsius AC contine-

bunt; quia verò $m^{\frac{n-1}{m}} = 8$, etiam octo quadrato-quadrato-

ta, singula aequalia quadrato-quadrato CB , habebunt octo radices aequales, quae octuplum radicis CB simul sumptae component. Si praeterea intelligatur AD bifariam divisa, haec itidem sexdecim quadrato-quadrata invicem aequalia includet, quorum radices simul sumptae octuplum eiusdem AD efficient, pariterque octo quadrato-

quadratorum, quorum unusquisque adaequet DB, radices erunt octuplae portionis DB, ac proinde vi Theo-

rematis antec. (305.) habetur $\overline{AC}^4 + 8\overline{CB}^4 < \overline{AD}^4 + 8\overline{DB}^4$.

Si fiat $m=3, n=4$, erit $CB = \frac{1}{4} AB$; quare portionibus AC, AD trifariam sectis, ac simili repetito ratiocinio, invenietur $\overline{AC}^4 + 27\overline{CB}^4 < \overline{AD}^4 + 27\overline{DB}^4$.

Si $m=2, n=5$; erit $CB = \frac{1}{3} AB$, divisisque bifariam

AC, AD, per idem ratiocinium prodibit $\overline{AC}^5 + 16\overline{CB}^5 < \overline{AD}^5 + 16\overline{DB}^5$; & sic de reliquis; unde per certissimam in-

ductionem tandem elicitur $\overline{AC}^{\frac{n}{m}} + m^{\frac{n-1}{m}} \overline{CB}^{\frac{n}{m}} < \overline{AD}^{\frac{n}{m}} + m^{\frac{n-1}{m}} \overline{DB}^{\frac{n}{m}}$

$\overline{DB}$, si generatim ponatur $CB = \frac{1}{m+1} AB$. Q.E.D.

THEOREMA IV.

314. Si recta AB (Fig. 131. 132.) ita dividatur in C, ut sit $AC = m CB$, per m numerum integrum affirmativum intelligendo; dico, $\overline{AC} \cdot CB$ esse maximum.

Dem. Cadat primò punctum D (Fig. 131.) inter puncta C, B, ac fiat $AD:AC = AC:AE = AE:AF$ &c. ita ut numerus continue proportionalium post AD, AC sit m ; erit etiam dividendo, $AD - AC:AC - AE = AC - AE:AE - AF$, nimirum $CD:CE = CE:EF$, &c. quare quum sit $CD > CE$, $CE > EF$, & ita porro, erit $CF < m CD$, ac proinde ob $AC = m CB$ (per hyp.), stabit $AC:m CB > CF:m CD$; & permutando, $AC:CF > m CB:m CD$, sive $AC:CF > CB:CD$; & convertendo, $AC:$

$AF < BC:BD$. Sed $\overline{AD}:\overline{AC} = \overline{AC}:\overline{AE} = AC:AF$; ergo

$\overline{AD}:\overline{AC} < CB:DB$; seu invertendo $\overline{AC}:\overline{AD} > DB:CB$;

unde $\overline{AC} \cdot CB > \overline{AD} \cdot DB$; quod erat primum.

Cadat secundo punctum D (Fig. 132.) inter puncta A, C, & fiat $AD:AC = AC:AE = AE:AF$, &c. ita ut numerus continue proportionalium post AD, AC sit m . Erit quoque $FE:EC = EC:CD$ &c. Quum autem sit $EF > CE$, $CE > CD$, &c. erit $CF > m CD$, adeoque $CF:m CD > AC:m CB$; & permutando, $CF:AC > m CD:m CB$, seu $CF:AC > CD:CB$; & componendo, $AF:AC > DB:$

CB . Sed $\overline{AD}:\overline{AC} = \overline{AC}:\overline{AE} = AC:AF$; & invertendo,

$AF:AC = \overline{AC}:\overline{AD}$; ergo $\overline{AC}:\overline{AD} > DB:CB$; Ex quo

AC.

$\overline{AC}^m \cdot CB > \overline{AD}^m \cdot DB$; quod erat secundum. (a).

COROLLARIUM I.

315. Extracta ex $\overline{AC}^m \cdot CB > \overline{AD}^m \cdot DB$ radice m , adhuc

permanet $AC \cdot \overline{CB}^{\frac{1}{m}} > AD \cdot \overline{DB}^{\frac{1}{m}}$, stante semper $AC = mCB$,

seu $CB = \frac{1}{m} AC$; quare si vicissim ponatur $\overline{AC}^{\frac{1}{n}} \cdot CB >$

$\overline{AD}^{\frac{1}{n}} \cdot DB$, erit $AC = \frac{1}{n} CB$, videlicet erit $\overline{AC}^{\frac{1}{n}} \cdot CB$ maxi-

imum, si $AC = \frac{1}{n} CB$. Sed demonstratum fuit $\overline{AC}^m \cdot CB$

tunc esse maximum, cum $AC = mCB$; ergo $\overline{AC}^{\frac{1}{n}} \cdot CB$ erit maximum, si $AC = \frac{m}{n} CB$.

COROLLARIUM II.

316. Elevato ad potestatem n producto $\overline{AC}^{\frac{m}{n}} \cdot CB$, prodit $\overline{AC}^m \cdot \overline{CB}^{\frac{n}{m}}$, quod maximum permanet, si ut ante fuerit $AC = \frac{m}{n} CB$, ex quo rectam AB ita secare discimus

in C , ut $\overline{AC}^m \cdot \overline{CB}^{\frac{n}{m}}$ aut $\overline{AC}^{\frac{m}{n}} \cdot CB$, aut $AC \cdot \overline{CB}^{\frac{n}{m}}$ sit maximum, ponendo nempe $AC : CB = m : n$. Co-

(a) V. Giornale de' Letterati pubblicato in Pisa l'anno 1757. T. VII. Par. I.

COROLLARIUM III.

317. Quoniam $AC = \frac{m}{n} CB$, & $AB (= AC + CB = \frac{m}{n} CB + CB) = \frac{m+n}{n} CB$, erit $CB = \frac{n}{m+n} AB$; hinc $AC =$

$\frac{m}{m+n} AB$; quare si $n=1$, nimirum si $\overline{AC} \cdot \overline{CB}$, seu

$AC \cdot CB$ esse debeat *maximum*, erit $AC = \frac{m}{m+1} AB$, pa-

riterque si $m=1$, hoc est si $\overline{AC} \cdot \overline{CB}$, seu $\overline{AC} \cdot CB$ debeat esse *maximum*, erit $AC = \frac{1}{n+1} AB$.

T H E O R E M A II.

318. Si in quadrante circulari, aut elliptico AMB (Fig. 133.), cujus centrum C, fiat $\overline{CP} = \frac{m^2}{m+n} \overline{AC}$; dico, produ-

ctum $\overline{CP} \cdot \overline{PM}$ esse maximum.

Dem. Duc in quadrante circulari tangentem TM occurrentem radijs CA, CB in punctis T, D. Habemus $\overline{PM}^2 = \overline{AG}^2 - \overline{PC}^2 = \overline{AC}^2 - \frac{m^2}{m+n} \overline{AC}^2 = \frac{n}{m+n} \overline{AC}^2$. Jam vero $\overline{CP} =$

$\frac{m^2}{m+n} \overline{AC}$, hoc est $\frac{m^2}{m+n} \overline{AC} : \frac{n}{m+n} \overline{AC} = \frac{n}{m+n} \overline{AC} : \frac{n}{m+n} \overline{AC}$:

$$\overline{PT}^2 = \frac{n^2}{m(m+n)} \overline{AC}^2; \text{ ergo } \overline{PC}^2 : \overline{PT}^2 = \frac{m}{m+n} \overline{AC}^2 : \frac{n^2}{m(m+n)}$$

$\overline{AC}^2 = m : n$; quare valet etiam $\overline{PC} : \overline{PT} = m : n$; adeoque

$\overline{PC} \cdot \overline{PT}$ est maximum (316.). Age ad hypotenusam TD rectam QE radio CD parallelam, quae circumferentiam

secabit in N. Propter $\overline{PT} : \overline{QT} = \overline{PM} : \overline{QE}$, erit $\overline{CP} \cdot \overline{PM}$

$> \overline{CQ} \cdot \overline{QE}$; sed $\overline{NQ} < \overline{QE}$, & sic ubique; ergo potiori

jure $\overline{CP} \cdot \overline{PM} > \overline{CQ} \cdot \overline{QN}$. Jam verò ellipseos ordinatae sunt circuli ordinatis respondentibus PM, QN proportionales; ergo &c.

C O R O L L A R I U M

319. Junctis CM, CN, quoniam triangulorum rectangulorum CPM, CQN hypotenusae CM, CN aequantur,

& ob $\overline{AC}^2 = \frac{m+n}{m} \overline{PC}^2$, habemus $\overline{PM}^2 = \frac{m+n}{m} \overline{PC}^2 - \overline{PC}^2 = \frac{n}{m}$

$\overline{PC}^2$, adeoque $m\overline{PM}^2 = n\overline{PC}^2$; si ab extremitatibus R, S diametri RS (Fig. 134.) ad circumferentiam semicirculi RGS duas chordas RG, GS ita jungamus in puncto

aliquo G, ut sit $\overline{GS}^2 : \overline{RG}^2 = m : n$, evadet $\overline{RG} \cdot \overline{GS}$ maximum. Pari ratione inter omnia triangula rectangula aequalibus hypotenusis insistentia, illud determinare possumus, in quo potentiae laterum angulum rectum efficientium inter se multiplicatae productum maximum gignant.

THEO.

THEOREMA III.

320. *Est parabola Apolloniana BAD (Fig. 135.) axem AC versus concava, cujus vertex A, & ordinata BD. Ductis quibuscumque QM axi AC parallelis, & ordinata*

BD terminatis, ajo, maximum productum $\overline{BQ}^n \cdot \overline{QM}^m$, aut

$\overline{BQ}^{\frac{n}{m}} \cdot \overline{QM}^{\frac{m}{n}}$, aut $\overline{BQ} \cdot \overline{QM}^{\frac{m}{n}}$ tunc haberi, cum $\overline{BQ} = \frac{m+n}{2m+n} BD$.

Dem. Ex puncto M agatur semiordinata MP. Erit QM

(= AC - AP) ut $\overline{DC}^2 - \overline{CQ}^2$ ex natura parabola, sive ut

$\overline{DQ} \cdot \overline{QB}$; quare $\overline{MQ} \cdot \overline{QB}$ erit ut $\overline{DQ} \cdot \overline{QB} \cdot \overline{QB}$, sive ut

$\overline{DQ} \cdot \overline{QB}^{\frac{m+n}{m}}$. Finge, inventum jam esse maximum productum

$\overline{DQ} \cdot \overline{QB}^{\frac{m+n}{m}}$, habebitur etiam maximum productum $\overline{DQ} \cdot$

$\overline{QB}^{\frac{m+n}{m}}$ ob radicis m extractionem. Sed si statuatur $\frac{m+n}{m}$

= p , productum $\overline{DQ} \cdot \overline{QB}^{\frac{m+n}{m}}$ fit $\overline{DQ} \cdot \overline{QB}^p$, quod eva-

dit maximum, cum $\overline{BQ} = \frac{p+1}{m+n} BD$ (317.), seu restitucis

valoribus, cum $\overline{BQ} = \frac{p+1}{2m+n} BD$. Ergo maximum produ-

ctum $\overline{MQ} \cdot \overline{QB}$, aut $\overline{MQ} \cdot \overline{QB}^{\frac{m}{n}}$, aut $\overline{MQ} \cdot \overline{QB}^{\frac{m}{n}}$ obtinetur

cum $\overline{BQ} = \frac{m+n}{2m+n} BD$. Q. E. D.

COROLLARIUM I.

321. Si quaeratur *maximum* triangulum BMQ dictae parabolae inscriptum, cujus vertex sit in alterutra ordinatae BD extremitate B, erit $m=1$, $n=1$, adeoque $BQ = \frac{2}{3} BD$.

COROLLARIUM II.

322. Si exoptetur *maximus* conus solido ex dictae parabolae circa axem BD revolutione genito inscriptus, cujus vertex sit in altera ordinatae BD extremitate B, erit $m=2$, $n=1$, quare $BQ = \frac{3}{5} BD$.

COROLLARIUM III.

323. Si desideretur *maximum* productum $MQ \cdot \overline{QB}^2$, erit $m=1$, $n=2$, ac proinde $BQ = \frac{3}{4} BD$. Itaque si concipiamus, omnia triangula BAC, BMQ, quae eidem parabolae modo recensito inscribi possunt, revolvi circa altitudines AC, MQ axi parallelas, innumeri orientur conus, quorum ille, in quo baseos radius $BQ = \frac{3}{4} BD$, erit *maximus*.

SCHOLIUM.

324. Si ponatur PM (Fig. 136.) proportionalis rectae AP, figura BAD evadet triangulum, in quo pariter QM ($= AC - AP$) est ut DC - CQ, nempe ut DQ, adeoque (per Theor. antec.) invenietur *maximum* triangulum BQM, verticem habens in puncto B, quod eidem inscribi possit, si BD bifariam secetur in Q. Itidem si statuatur, triangulum ipsum BAD circa basim BD tanquam axem revolvi, ut solidum generetur, *maximus* conus inscriptus BMQ habebitur, si BQ sit ad QD, ut 1 ad 2. &c.

Opor-

Oportet autem, ut basis BD ita secta sit a normali AC in C, ut BC excedat CD prout problematis conditio requirit, secus in absurdum laberemur, ut rem consideranti palam fiet; si enim quaeratur *maximum* triangulum, quod ipsi triangulo BAD inscribi possit, portio BC esse debet saltem aequalis reliquae CD; si quaeratur *maximus* conus comprehensus solido ex revolutione trianguli BAD circa basem BD genito, portio BC esse debet saltem subdupla remanentis CD; & sic de ceteris.

T H E O R E M A IV.

325. *Parabolae, ac paraboloides cujuscunque ordinis in infinitum repraesententur per aequationem $\overline{PM}^n = AP$ (Fig. 137. 138.), per n numerum quemvis affirmativum integrum, vel fractum intelligendo; dico, productum*

$\overline{PM}^{\frac{m}{r}} \cdot \overline{PB}^{\frac{r}{m}}$, aut $\overline{PM}^{\frac{r}{m}} \cdot \overline{PB}^{\frac{m}{r}}$, aut $\overline{PM}^{\frac{m}{r}} \cdot \overline{PB}^{\frac{r}{m}}$ tunc esse maximum. cum $AP = \frac{m}{m+nr} AB$.

Dem. Quoniam $\overline{PM}^n = AP$, erit $\overline{PM}^{\frac{m}{n}} = \overline{AP}^{\frac{m}{n}}$; hinc $\overline{PM}^{\frac{r}{n}} \cdot \overline{PB}^{\frac{r}{n}} = \overline{AP}^{\frac{r}{n}} \cdot \overline{PB}^{\frac{r}{n}}$; quapropter si ponatur jam inventum esse quod quaeritur, extracta radice r, erit etiam maximum $\overline{AP}^{\frac{m}{nr}} \cdot \overline{PB}$, ac proinde si fiat $AP = \frac{m}{m+nr} AB$, erit ex dictis

$\overline{PM}^{\frac{r}{m}} \cdot \overline{PB}^{\frac{m}{r}}$, aut $\overline{PM}^{\frac{r}{m}} \cdot \overline{PB}^{\frac{m}{r}}$, aut $\overline{PM}^{\frac{r}{m}} \cdot \overline{PB}^{\frac{m}{r}}$ maximum. Q. E. D.

COROLLARIUM I.

326. Si quaeratur *maximum* rectangulum parabolis c. juscumque ordinis inscriptum, erit $m = 1$, $r = 1$, quare

tunc evadet $AP = \frac{1}{1+n} AB$; adeoque si parabola fuerit

Apolloniana axem versus concava, fiet $AP = \frac{1}{3} AB$, &

idcirco $PB = \frac{2}{3} AB$. Si eadem parabola Apolloniana

fuerit axem versus convexa, erit $n = \frac{1}{2}$, quamobrem AP

$= \frac{2}{3} AB$, ac proinde $PB = \frac{1}{3} AB$. Si vero parabola cu.

bica fuerit axem versus convexa, erit $n = \frac{1}{3}$; hinc AP

$= \frac{3}{4} AB$, & $PB = \frac{1}{4} AB$, &c.

COROLLARIUM II.

327. Si figuris ABC circa axem AB revolutis, expetatur *maximus* cylindrus solidis inde genitis inscriptus,

erit $m = 2$, $r = 1$, adeoque fiet $AP = \frac{2}{2+n} AB$. Itaque

si parabola fuerit cubica axem versus concava, erit n

$= 3$, quare $AP = \frac{2}{5} AB$, & $PB = \frac{3}{5} AB$. Si vero pa-

rabola cubica fuerit axem versus convexa, erit $n =$

$\frac{1}{3}$; hinc $AP = \frac{6}{7} AB$, & $PB = \frac{1}{7} AB$, &c. Ergo ductis

diagonalibus BM, inter omnes conos a triangulis rectangulis BMP ex figurae ACB circa axem AB revolutione genitos habebitur *maximus*.

COROLLARIUM III.

328. Si figuris iisdem ABC circa ordinatas BC rotatis, postuletur *maximus* cylindrus, qui solidis inde prodeuntibus inscribi possit, *maximum* nempe productum $\overline{PM}^2 \cdot \overline{PB}$, erit $m=1$, $r=2$, proptereaque fiet $AP = \frac{1}{1+2n} AB$. Ergo posita parabola biquadratica axem versus concava, erit $n=4$, unde $AP = \frac{1}{9} AB$, & $PB = \frac{8}{9} AB$. Quod si parabola eadem biquadratica axem convexitate respiciat, erit $n = \frac{1}{4}$, ex quo $AP = \frac{2}{3} AB$, & $PB = \frac{1}{3} AB$. Igitur hinc quoque inter omnes conos a triangulis rectangulis BMD in huiusmodi figurarum conversione genitos *maximus* erit in promptu.

COROLLARIUM IV.

329. Si in aequatione generali $\overline{PM}^n = AP$ fiat $n=1$, figurae ACB in triangula ABC (Fig. 139.) degenerabunt, eritque $\overline{PM}^m \cdot \overline{PB}^r$, seu $\overline{BD}^m \cdot \overline{DM}^r$ *maximum* cum $AP = \frac{m}{m+r} AB$. Quare si quis *maximum* rectangulum, quod ijs inscribi possit, cupiat, habebit $AP = \frac{1}{2} AB$ (326.). Similiter triangulis istis circa axem AP circumductis, si quis velit *maximum* cylindrum, qui conis inde genitis inscribi possit, reperiet $AP = \frac{2}{3} AB$ (327.); quae cum jam demonstratis (112. 264.) apprime congruunt.

SCHOLIUM

330. Animadvertite, $\overline{BD}^m \cdot \overline{DC}^r$ esse proportionale produ-
cto $\overline{BD}^m \cdot \overline{DM}^r$. Hinc ad hyperbolas cujuscunque ordinis
intra asymptotos tangens, vestigijs cel. *P. Guid. Grandi*
(a) insistendo, duci facile poterit. Sit enim *OMG* (*Fig.*
140.) una ex hujusmodi hyperbolicis intra asymptotos *AB*,
EC, cujus aequatio $\overline{BD}^m \cdot \overline{DM}^r = \overline{BE}^m \cdot \overline{EG}^r$. Ducta ex dato
puncto *M* ordinata *MD*, fiat $\overline{BD} : \overline{DC} = m : r$, sive $\overline{DC}$
 $= \frac{r}{m} \overline{BD}$, jungaturque *CM*; haec tanget curvam *OMG*
in puncto *M*. Siquidem $\overline{BD}^m \cdot \overline{DM}^r > \overline{BE}^m \cdot \overline{EF}^r$ (316.); sed $\overline{BD}^m \cdot$
 $\overline{DM}^r = \overline{BE}^m \cdot \overline{EG}^r$; ergo $\overline{BE}^m \cdot \overline{EG}^r > \overline{BE}^m \cdot \overline{EF}^r$, adeoque $\overline{EG} >$
 $\overline{EF}$; quamobrem punctum *F* erit extra curvam *OMG*,
& ita semper; ergo recta *CA* dictam curvam *OMG* in
unico puncto *M* tanget. Q. E. D.

THEOREMA V.

331. Sit ad omnes circulos, aliasque curvas agnatas
cujuscunque ordinis in infinitum aequatio $\overline{CD}^{m+n} = \overline{AC}^r$.
 $\overline{CB}^s$ (*Fig.* 141.); ajo, maximum productum $\overline{AC}^t \cdot \overline{CD}^u$ runc
haberi, cum $\overline{AC} = \frac{mt + nt + ru}{mt + nt + ru + su} \overline{AB}$.

Dem. Productum $\overline{AC}^t \cdot \overline{CD}^u$ attollatur ad potestatem $m+n$,
pro-

(a) *Epist. Geom. Lemm. IX. ad Calcem Operis De infinit.*
infinitorum &c.

proveniet $\overline{AC}^{(m+n)t} \cdot \overline{CD}^{(m+n)v} = \overline{AC}^{mt+nt} \cdot \overline{AC}^{rv} \cdot \overline{CB}^{sv} =$
 $\overline{AC}^{mt+nt+rv} \cdot \overline{CB}^{sv}$; ex quo extracta radice sv , fiet $\overline{AC}^{\frac{mt+nt+rv}{sv}} \cdot \overline{CB} =$

Ergo ut habeatur *maximum* productum $\overline{AC}^t \cdot \overline{CD}^v$,

seu $\overline{AC}^{\frac{v}{t}} \cdot \overline{CD}^{\frac{t}{v}}$, seu $\overline{AC} \cdot \overline{CD}$, esse debet $AC = \frac{mt+nt+rv}{mt+nt+rv+sv} AB$.

Q. E. D.

COROLLARIUM I.

332. Quum ordinatis circuli cujuscumque ordinis in infinitum ordinatae respondentes ellipseos ejusdem ordinis circa eundem axem sint proportionales; quod de circulis cujuscumque ordinis demonstratum est, idem in ellipsis ordinis cujuscumque locum obtinet.

COROLLARIUM II.

333. Si quis cupiat *maximum* triangulum circulis, vel ellipsis cujuscumque ordinis inscriptum, erit $t = 1$,

$v = 1$; quare fiet $AC = \frac{m+n+r}{m+n+r+s} AB$; adeoque si ADB

fuerit circulus, vel ellipsis vulgaris, erit $m = 1, n = 1$,

$r = 1, s = 1$, & $AC = \frac{3}{4} AB$ prorsus ut alibi (133.) statuimus. Quod si fuerit circulus cubicus, vel ellipsis cu-

bica, ob $m = 2, n = 1, r = 2, s = 1$, erit $AC = \frac{5}{6} AB$, &c.

COROLLARIUM III.

334. Si quis postulet *maximum* conum solidis ex circulo-

culorum, aut ellipsoidum cujuscumque ordinis ADB revolutione circa axem AB genitis inscriptum, erit $t = 1$,

$v = 2$; hinc $AC = \frac{m+n+2r}{m+n+2r+2s} AB$. Quapropter si ADB

fuerit circulus, aut ellipsis vulgaris, evadet $m = 1$, $n =$

1 , $r = 1$, $s = 1$, ex quo $AC = \frac{2}{3} AB$, quod cum jampridem demonstratis (284.) egregie conspirat. Si vero ob $m = 3$, $n = 1$, $r = 1$, $s = 3$, circulus fuerit biquadraticus,

aut ellipsis biquadratica ipsi adnexa, habebitur $AC = \frac{1}{2} AB$; vel si circulus iterum fuerit biquadraticus, in quo

$m = 3$, $n = 1$, $r = 3$, $s = 1$, fiet $AC = \frac{5}{6} AB$, &c.

COROLLARIUM IV.

335. Si quis quaerat *maximum* productum $\overline{AC} \cdot CD$, erit $t = 2$, $v = 1$, quamobrem $AC = \frac{2m+2n+r}{2m+2n+r+s} AB$. Ergo

in circulo, aut ellipsi vulgari quum sit $m = 1$, $n = 1$, r

$= 1$, $s = 1$, proveniet $AC = \frac{5}{6} AB$, prout ostendimus

(147.). Quod si ponatur $m = \frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{2}$, $r = 2$, $s = 3$,

inveniemus $AC = \frac{4}{7} AB$; & sic de ceteris.

THEOREMA VI.

336. In Curva qualibet AM (Fig. 142.) axem AP versus concava, cujus tangens TM innotescat, si fiat $TP:PB = m:n$, ac deinde ductis ordinatis PM, BC, agatur MD parallela axi AP, ita ut prodeat parallelo-

gram-

grammum $PMDB$; dico productum $\overline{PM}^m \cdot \overline{MD}^n$ esse maximum.

Dem. Ducta quavis ordinata LH , protrahantur ordinatae LH , BC usque ad occursum tangentis TM in punctis E , N , compleanturque parallelogramma $LHIB$, $LEFB$. Constat ex dictis (329.), in triangulo TBN factum $\overline{PM}^m \cdot \overline{MD}^n$ majus esse facto quovis $\overline{LE}^m \cdot \overline{EF}^n$ sed hoc majus est facto $\overline{LH}^m \cdot \overline{HI}^n$; ergo &c.

COROLLARIUM I.

337. Si statuatur $m = 1$, $n = 1$, erit $BP = PT$, adeoque parallelogrammum $PMDB$ maximum. Ex quo vicissim colligitur, dato maximo parallelogrammo curvae cui-libet inscripto, tangentem duci ad ipsam facile posse. Si enim maximum parallelogrammum curvae AMC (Fig. 138. 142.) inscriptum sit $PMDB$, sumpta $PT = PB$, erit PT subtangens, ac TM tangens. Quapropter in infinitis parabolis, ac paraboloidibus cum axem versus concavis, tum convexis, subtangentes nullo negotio post superius demonstrata (326.) assequi possumus; siquidem ob $AB - AP = PB$, atque $AB = (1 + n) AP$, prodit $PB = (1 + n) AP - AP = n AP$.

COROLLARIUM II.

338. Stantibus iisdem, si figura $AMCB$ circa axem AB revolvi concipiatur, ex maximo rectangulo $PMDB$ figurae eidem inscripto solidum orietur, cujus superficies curva erit maxima comparate ad omnes superficies curvas solidorum ex singulis rectangulis LI rotatis proceduntium.

COROLLARIUM III.

339. Si ponatur $m = 2$, $n = 1$, *maximum* obtinebitur solidum a rectangulo PMDB (*Fig. 142.*) in dictae figurae AMCB circa axem AB conversione genitum.

COROLLARIUM IV.

340. Si ordinatis PM, BN ad angulum rectum cum axe constitutis, fingamus, figuram AMN revolvi circa axem BN, *maximum* cylindrum solido hinc genito inscriptum inveniemus, si statuamus $m = 1$, $n = 2$, seu si fiat PB dupla subtangentis TP. Hunc vero maximum cylindrum etiam habere possumus, si BN ita secetur in D, ut sit ND dupla remanentis DB, quod eodem recidit, nam $TB : MD = BN : ND$, ac propterea dividendo, $TP : PB = BD : DN$, adeoque BD est subdupla ipsius DN, ut fieri debet.

L E M M A

341. *Parabola ejusdem generis, seu per aequationes similes expressae, sunt in ratione composita basium, & altitudinum; solida verò ab iisdem parabolis circa axes rotatis genita sunt in ratione composita ex simplici altitudinum, & duplicata basium.*

Dem. Parabolarum ejusdem generis AMCB, DNFE (*Fig. 143. 144.*) altitudines AB, DE concipiantur divisae per eundem numerum partium aequalium summe exiguarum, quarum duae similiter sitae sint PG, QK, & agantur ordinatae PM, GH, QN, KL. Habemus $AP : AB = DQ :$

DE ; sed $AP : AB = \overline{PM}^n : \overline{BC}^n$, $DQ : DE = \overline{QN}^n : \overline{EF}^n$; ergo

$\overline{PM}^n : \overline{BC}^n = \overline{QN}^n : \overline{EF}^n$, pariterque $PM : BC = QN : EF$, & permutando, $PM : QN = BC : EF$. Finge interea, ductas esse tangentes TM, SN. Quoniam curvae ponuntur polygo-

lygona lateribus exilissimis conflata, tangentes istae latercula MH, NL continuabunt, quare triangula TPM, SQN erunt invicem ut TP.PM ad SQ.QN, five ob $TP = n AP$, $SQ = n DQ$ (337.), ut AP.PM ad DQ.QN, five ut AB.BC ad DE.EF. Idem ostendetur de triangulis TGH, SKL, quare convertendo, trapetium PMHG erit ad trapetium QNLK in eadem ratione constanti, nempe ut AB.BC ad DE.EF; sed idem de ceteris trapezibus sibi respondentibus, & areas parabolicas efficientibus demonstrari potest; ergo tota parabola AMCB erit ad totam parabolam DNFE, ut AB.BC ad DE.EF; *quod erat primum.*

Imaginare nunc, figuras easdem circa axes AB, DE rotari. Coni a dictis triangulis TMP, SNQ geniti erunt

inter se, ut $TP.PM^2$ ad $SQ.QN^2$, five ut $AP.PM^2$ ad

$DQ.QN^2$, hoc est ut $AB.BC^2$ ad $DE.EF^2$ (*per dem.*);

sed in eadem ratione sunt coni ex revolutione triangulorum reſtangulorum THG, SLQ; ergo convertendo, etiam coni obtruncati ex trapetiis PMHG, QLNK erunt

ut $AP.PM^2$ ad $DQ.QN^2$, ut $AB.BC^2$ ad $DE.EF^2$; quod

quum de ceteris conis obtruncatis solida parabolaram circa axes revolutarum componentibus ostendi possit, erit solidum ex parabola ACMB ad solidum ex parabola

DNFE, ut $AB.BC^2$ ad $DE.EF^2$; *quod erat secundum.*

COROLLARIUM I.

342. Completis reſtangulis ABCR, DEFV, quoniam cylindri orti ex eorum conversione circa axes AB, DE sunt solidis ex parabolis AMCB, DNFE circa eundem axem rotatis proportionales; convertendo, etiam solida ex parabolis externis AMCR, DNFV eodem modo rotata componentur ex simplici suarum ordinatarum RC, VF,

VF, & duplicata fuorum axium AR, DV ratione. Quum autem superius demonstrata ad omnes parabolas tam axes versus concavas, quam convexas extendantur, eodem ratiocinio ostendetur, solida ex parabolis AMCB, DNFE circa contingentes AR, DV ad axium AB, DE vertices A, D revolutis esse in ratione composita ex simplici ordinatarum BC, EF, & duplicata axium AB, DE.

COROLLARIUM II.

343. Spatium parabolicum APM erit ad aliud quodvis ejusdem parabolae spatium ABC, ut AP . PM ad AB . BC, nimirum ut coordinatarum rectangula; & solidum ex spatio APM ad solidum ex spatio ABC in conversione parabolae AMCB circa axem AB, ut $AP \cdot \overline{PM}^2$ ad $AB \cdot \overline{BC}^2$, videlicet in ratione composita ex simplici abscissarum, & duplicata ordinatarum; quod facile per allatum ratiocinium evincitur, si spatium parabolicum DQN ponatur simile, & aequale spatio parabolico APM.

SCHOLIUM

344. Hinc parabolarum cujuscunque ordinis constructio descendit. Sit siquidem semicirculus AMB (*Fig. 145.*), cujus ordinatae PM, QN. Junctis AM, AN, productisque MP, NQ, fiat $PR : QS = AM : AN$ & ita semper; curva, quae per puncta R, S transit, est parabola primi ordinis,

stat enim $\overline{PR}^2 : \overline{QS}^2 = AP : AQ$, qui est parabolae conicae, seu apolloniana character; seu si parabolam hanc ex parte averfa, hoc est convexa, considerare lubeat, excitata ex diametri AB puncto A normali AD, ductisque RT, SV, quae sint abscissis AP, AQ parallelae, valebit

$$TR : VS = \overline{AT}^2 : \overline{AV}^2.$$

Est ARS (*Fig. 146.*) parabola primi ordinis axem
AQ

AQ convexitate respiciens, cujus ordinatae PR, QS. Spatium ARP est ad spatium ASQ, ut rectang. APR

ad AQS; sed $PR : QS = \overline{AP}^2 : \overline{AQ}^2$; ergo substituendo, erit APR ad AQS, ut $\overline{AP}^3$ ad $\overline{AQ}^3$. Itaque si fiat APR;

AQS = PT : QV, erit $PT : QV = \overline{AP}^3 : \overline{AQ}^3$. Curva igitur per puncta T, V traducta erit parabola secundi ordinis, qua sic facillime descripta, haberi statim possunt ex parte concava duo cubi in data quavis ratione.

Posita ARS parabola secundi ordinis, fiat ut rectang. APR ad AQS, ita PT ad QV, curva ATV puncta T, V trajiciens erit per idem ratiocinium parabola tertij ordinis, & sic in infinitum.

Ex parabolarum autem cujuscumque gradus ordinatis inverse positae hyperbolarum cujuscumque gradus intra asymptotos, Apolloniana excepta, emergit constructio.

THEOREMA VII.

345. Ex omnibus parabolis CFM, CHN (Fig. 133, 147.) ejusdem generis, & cujuscumque ordinis vertices habentibus in centro C quadrantis circularis, aut elliptici AMBC & perimetrum ANB secantibus; illa CFM, cu-

jus abscissa $\overline{CP} = \frac{\overline{m}^2}{\overline{m} + \overline{n}} \overline{AC}$, maximum habet productum $\overline{CP} \cdot \overline{PM}$.

Dem. Parabolae CFM, CHN sunt ut triangula CPM, CQN ijs inscripta, vel circumscripta (341.); sed in his-

ce productum $\overline{CP} \cdot \overline{PM}$ est semper majus productio quovis $\overline{CQ} \cdot \overline{QN}$ cum $\overline{CP}^2 = \frac{\overline{m}^2}{\overline{m} + \overline{n}} \overline{AC}^2$ (318.); ergo &c.

CORO-

COROLLARIUM I.

346. Si fiat $m = 1, n = 1$, erit $\overline{CP}^2 = \frac{1}{2} \overline{AC}^2$, sive angulus MCP erit semirectus; videlicet inter omnes ejusmodi parabolas, illa erit *maxima*, in qua triangulum ipsi inscriptum, aut circumscriptum efficit in ejus vertice cum abscissa angulum semirectum.

COROLLARIUM II.

347. Si $m = 1, n = 2$, erit $\overline{CP}^2 = \frac{1}{3} \overline{AC}^2$; nempe si quadrans circularis, aut ellipticus AMBC circa axem AC una cum recensitis parabolis CFM, CHN in gyrum versetur, inter omnia solida parabolica hinc emergentia, illud, in quo altitudo CP subtripulum potest radij, vel semiaxis AC, erit *maximum*.

COROLLARIUM III.

348. Si $m = 2, n = 1$, erit $\overline{CP}^2 = \frac{2}{3} \overline{AC}^2$; hoc est si eadem parabolas CFM, CHN cum quadrante circulari, aut elliptico AMBC circa radium, aut semiaxem conjugatum CB circumagi concipiamus, inter omnia solida sic genita, illud, cujus maxima latitudo duos diametri circularis, aut axis elliptici trientes potentia adaequat, est *maximus*.

THEOREMA VIII.

Inter omnes parabolas ejusdem generis, & cujuscunque ordinis BEAC, BFMQ (Fig. 135.) parabola conica BAD ordinatam integram BD versus concavae, ac vertices in alterutra ejusdem ordinatae extremitate, puta B,

habentes; illa, in qua $BQ = \frac{m+n}{2m+n} BD$, maximo gaudet

coordinatarum producto $\overline{BQ} \cdot \overline{QM}$.

Dem.

Dem. Parabolae BEAC, BFMQ sunt ut triangula BAC, BMQ ipsis inscripta (341.); ergo ex dictis (320.) res patet.

COROLLARIUM I.

350. Si $m=1, n=1$, erit $BQ = \frac{2}{3} BD$; nimirum ex omnibus hujusmodi parabolis BEAC, BFMQ illa est *maxima*, cujus axis BQ duos trientes occupat integrae ordinatae BD. Idem valet, si parabolae AEBC, MFBQ habeant vertices A, M in dictae parabolae BAD perimetro, ac per punctum B omnes transeant.

COROLLARIUM II.

351. Si $m=2, n=1$, erit $BQ = \frac{3}{5} BD$; videlicet si parabola conica BAD simul cum parabolis BEAC, BFMQ circa ordinatam BD rotetur, inter omnia solida a parabolis hisce BEAC, BFMQ genita, illud, cujus altitudo $BQ = \frac{3}{5} BD$, erit *maximum*.

THEOREMA IX.

352. Inter omnes ejusdem generis, & cujuscunque ordinis parabolas AVDC (Fig. 141.) infinitis circulis ADE

per aequationem $\overline{CD} = \overline{AC} \cdot \overline{CB}$ expressis circa diametrum AB descriptas, vertices in ejus extremitate A habentes, & eosdem circulos secantes; illa, cujus altitudo

$AC = \frac{mt + nt + ru}{mt + nt + ru + su} AB$, coordinatarum producto $\overline{AC} \cdot \overline{CD}$ maximo pollet.

Dem. Hujusmodi parabolae sunt ut triangula ACD ijs inscripta (341.); sed triangula ista tunc habent maximum pro-

productum $\overline{AC}^t \cdot \overline{CD}^v$, cum $AC = \frac{mt + nt + rv}{mt + nt + rv + sv} AB$ (331.);
ergo &c.

COROLLARIUM I.

353. Si $t=1$, $v=1$, parabola AVDC tunc evadit maxima, cum $AC = \frac{m+n+r}{m+n+r+s} AB$; quod etiam accidit, si omnes parabola per punctum A transeuntes habeant vertices D in circulorum perimetris. Hic autem notes velim, omnes parabolas maximas AVDC, vertices habentes in eadem diametri AB extremitate A, per idem punctum D transire debere, si circulus ADE, cujuscumque sit ordinis, non immutetur.

COROLLARIUM II.

354. Si $t=1$, $v=2$, fiet $AC = \frac{m+n+2r}{m+n+2r+2s} AB$; hoc est si quis ex infinitis circulis ADB sub aequatione $\overline{CD} = \overline{AC} \cdot \overline{CB}$ repraesentatis, concipiatur, una cum parabolis AVDC cujuscumque ordinis, sed ejusdem generis (vertices habentibus in diametri AB extremitate A, circulumque secantibus) revolvi circa diametrum ipsam; inter omnia solida parabolica hinc prodeuntia, illud, cujus altitudo $AC = \frac{m+n+2r}{m+n+2r+2s} AB$, erit *maximum*.

COROLLARIUM III.

355. Si $t=2$, $v=1$, erit $AC = \frac{2m+2n+r}{2m+2n+r+s} AB$;
ni.

nimirum si circulus ABD, cujuscunque sit ordinis, simul cum adnexis parabolis AVDC cujuslibet gradus, sed ejusdem generis, vertices habentibus in diametri AB extremitate A, circulumque secantibus, revolvatur circa rectam MN tangentem circulum in puncto A; inter omnia solida ex parabolaram conversione orta, illud erit *maximum*, quod a parabola generatur, cujus axis $AC =$

$$\frac{2m + 2n + r}{2m + 2n + r + s} AB.$$

$$2m + 2n + r + s$$

COROLLARIUM IV.

356. Haec omnia locum obtinent in parabolis cujuscunque ordinis, sed ejusdem generis, infinitis ellipsis eodem modo inscriptis; siquidem omnes ellipses constant ordinatis, quae respondentibus circulorum ejusdem generis ordinatis sunt proportionales, ut earum generalis aequatio demonstrat.

THEOREMA X.

357. Inter omnes parabolas cujuscunque ordinis, & ejusdem generis ACB (Fig. 148.) vertices habentes in baseos DF dimidio C parabola DEF per aequationem

$\overline{HB} = EH$ expressae, eandemque quomodocunque secantes; illa, cujus basis AB altitudinem EC dictae parabola DEF

ita secat in H, ut sit $EH = \frac{m}{m+n+r} EC$, maximo coordi-

natarum producto $\overline{AH} \cdot \overline{CH}$ afficitur.

Dem. Parabola ACB sunt ut rectangula ex coordinatis AH, HC (341.), sive ut rectangula parabola DEF

inscripta; sed cum $EH = \frac{m}{m+n+r} EC$, ista rectangula *maximum*

ximum habent productum $\overline{AH}^m \cdot \overline{CH}^r$ (325.); ergo &c.

COROLLARIUM I.

358. Si $m = 1, r = 1$, erit $EH = \frac{1}{1+n} EC$; videlicet

inter omnes parabolas ACB cujuscunque ordinis, sed ejusdem generis, parabola DEF cujuscvis gradus modo exposito inscriptas, illa, quae ipsius parabola DEF ita

secat in H axem EC, ut evadat $EH = \frac{1}{1+n} EC$, erit *maxima*.

COROLLARIUM II.

359. Si $m = 2, r = 1$, erit $EH = \frac{2}{2+n} EC$; hoc est si

figura DEF ex dictis parabolis constans circa axem EC revolvatur; inter omnia solida a parabolis ACB genita, illud, cujus basis ita secat in H axem EC, ut fiat $EH = \frac{2}{2+n} EC$, erit *maximum*.

COROLLARIUM III.

360. Si $m = 1, r = 2$, erit $EH = \frac{1}{1+2n} EC$; scilicet si

eadem figura DEF cum adnexis parabolis circa basim DF in gyrum ducatur; inter omnia solida a parabolis istis conflata, illud ortum a parabola ACB, cujus basis AB ita secat in H axem EC parabola DEF, ut exurgat $EH = \frac{1}{1+2n} EC$, erit *maximum*.

COROLLARIUM IV.

361. Posita $n = 1$, hoc est parabola DEF in triangulum

lum migrante, coordinatarum productum $\overline{AH} \cdot \overline{CH}$ tunc
erit *maximum*, cum $\overline{EH} = \frac{m}{m+r} \overline{EC}$, ut supra (329.), &c.

T H E O R E M A XI.

362. Si conus ABFC (Fig. 75.) superiorum ordinum (i) nempe, qui circulos BFC aequationis generalis $\overline{EF} = \frac{m+r}{r} \overline{CE} \cdot \overline{EB}$ pro basibus agnoscunt) secetur plano, quod alteri plano superficiei conicae superposito sit parallelum, notum est, sectiones hinc genitas DFE esse parabolas cujuscunque gradus (a). Hoc praemisso, aio, inter omnes parabolas ab hujusmodi sectionibus in cono cujusvis ordinis genitas, illam esse maximam, cujus abscissa DE, aut ordinata EF respondet diametri CB portioni $\overline{CE} = \frac{m+n+r}{m+n+r+s} \overline{CB}$; quod etiam valet in conis ABLC, quorum bases sunt ellipses BLC cujuscunque gradus.

Dem. Parabolae ejusdem generis DFE, vel DLE sunt in utroque casu, ut coordinatarum rectangula DEF, seu DEL (341.), dummodo circulus BFC, & ellipsis BLC sint ejusdem gradus, facta cum omnium ordinatarum potentiis comparatione. Sed rectangula DEF, aut DEL sunt rectangulis CEF, aut CEL proportionalia; ergo tam rectangulum DEF, quam DEL erit maximum, ac proinde tam parabola DFE in primo casu, quam DLE in altero erit maxima, cum $\overline{CE} = \frac{m+n+r}{m+n+r+s} \overline{CB}$ (333.). Q. E. D.

THEO-

(a) V. Wolfij Elem. Math. Univ. Tom. I. Elem. Analys. Sect. II. Cap. VI. §. 528.

THEOREMA XII.

363. Sit semiellipsi Apolloniana ADB (Fig. 149.), cujus axis transversus AB, foci F, f, centrum C; secta AB

in H, ita ut sit $AH = \frac{1}{m+1} AB$, ex foco alterutro, puta F, applicetur perimetron ADB recta $FD = AH$; jungaturque Df; dico $f\bar{D} + m \frac{n}{n-1} \bar{D}\bar{F}$ esse minimum.

Dem. Ex natura ellipseos habemus $fD + DF = AB$; sed $AH = DF$; ergo $fD = BH$. Jam verò ex dictis (313.)

$BH + m \frac{n}{n-1} \bar{H}\bar{A}$ est minimum; ergo erit quoque minimum $f\bar{D} + m \frac{n}{n-1} \bar{D}\bar{F}$. Q. E. D.

SCHOLIUM

364. Ut $FD = AH$ possit ex puncto F applicari perimetron semiellipseos ADB, oportet, ut sit $AH > AF$. Etenim centro C, radio CA descripto semicirculo AEB, productaque fD usque ad circumferentiam in E, apertum est, semiellipsim ADB totam cadere intra semicirculum AEB, ac proinde esse $fE > fD$; sed $fA > fE$; ergo potiori jure $fA > fD$. Est autem $fD + DF = AB$; ergo $fD < BF$, adeoque $DF > AF$.

Alia id genus praeter ea, quae hoc in additamento exposuimus, suppetebant Theoremata, verùm quum liber satis succrevisset, ista consultò praetermisimus, & Tironum in hoc amoenissimo, ac praeclarissimo studio sese naviter exercentium sollertiae reliquimus, ut majus in ijs inveniendis, colligendisque animo capiant oblectamentum.

FINIS.

pag. 2. v. 3. quae duabus
 p. 15. v. 17. CB, ec. adeoque
 p. 20. v. 14. omnium
 Ibid. v. 25. AE † FG
 p. 21. v. 3. inter sectione
 Ibid. v. 17. &c.
 p. 23. v. 1. *maximum*
 Ibid. v. 2. quae
 Ibid. v. 9. isoscelis
 p. 25. v. ult. HI
 p. 26. v. 8. Si
 Ibid. v. 22. HF, HF

p. 27. v. 23. C
 p. 30. v. 16. minimum
 Ibid. v. 20. efficiunt
 Ibid. v. 23. quamvis
 Ibid. v. 24. affirmatorum
 p. 31. v. 20. enim adverte
 p. 35. v. 8. DF

p. 39. v. 19. $\overline{HQ}^2$
 Ibid. v. 20. $\overline{HS}^2$

p. 41. v. 18. $\overline{BD}^2 \dagger \triangleleft$
 p. 45. v. 25. dito
 p. 46. v. 7. AD : CD
 p. 48. v. 9. BDEF

p. 98. v. 18. $\overline{DB}^2$ sunt

Ibid. v. 19. $\overline{CB}^2$
 p. 99. v. 14. ut figuris
 p. 160. v. 21. Inter

Cetera minoris momenti L. B. corriget.

quae in duabus
 CB, adeoque
 dico, omnium
 AE † EG
 intersectione
 ergo &c.
minimam
 quare
 isoscelijs
 HB
 Quod si
 HE, HF

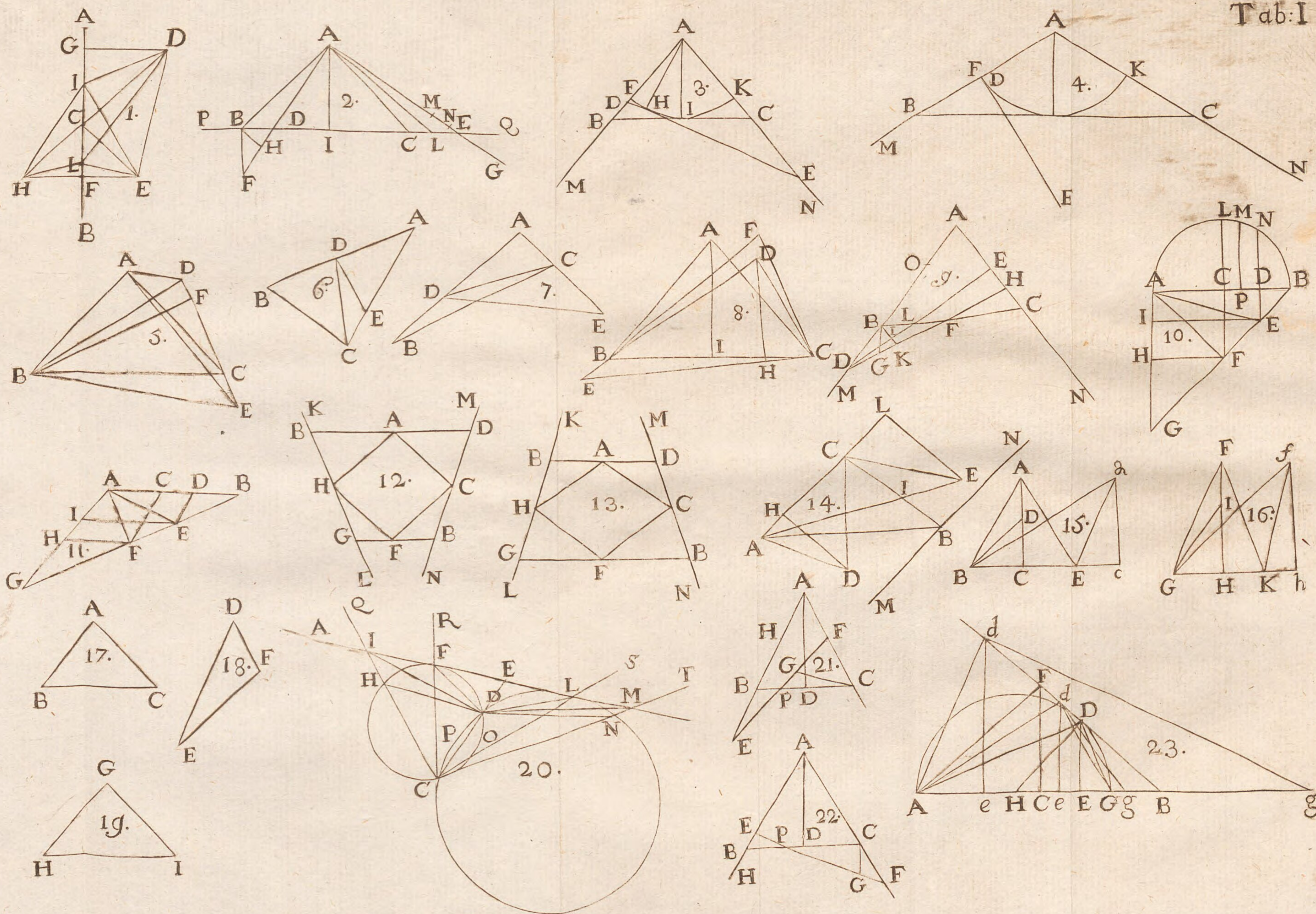
²
 C
 minimam
 efficient
 quemvis
 affirmativum
 animadverte
 DE

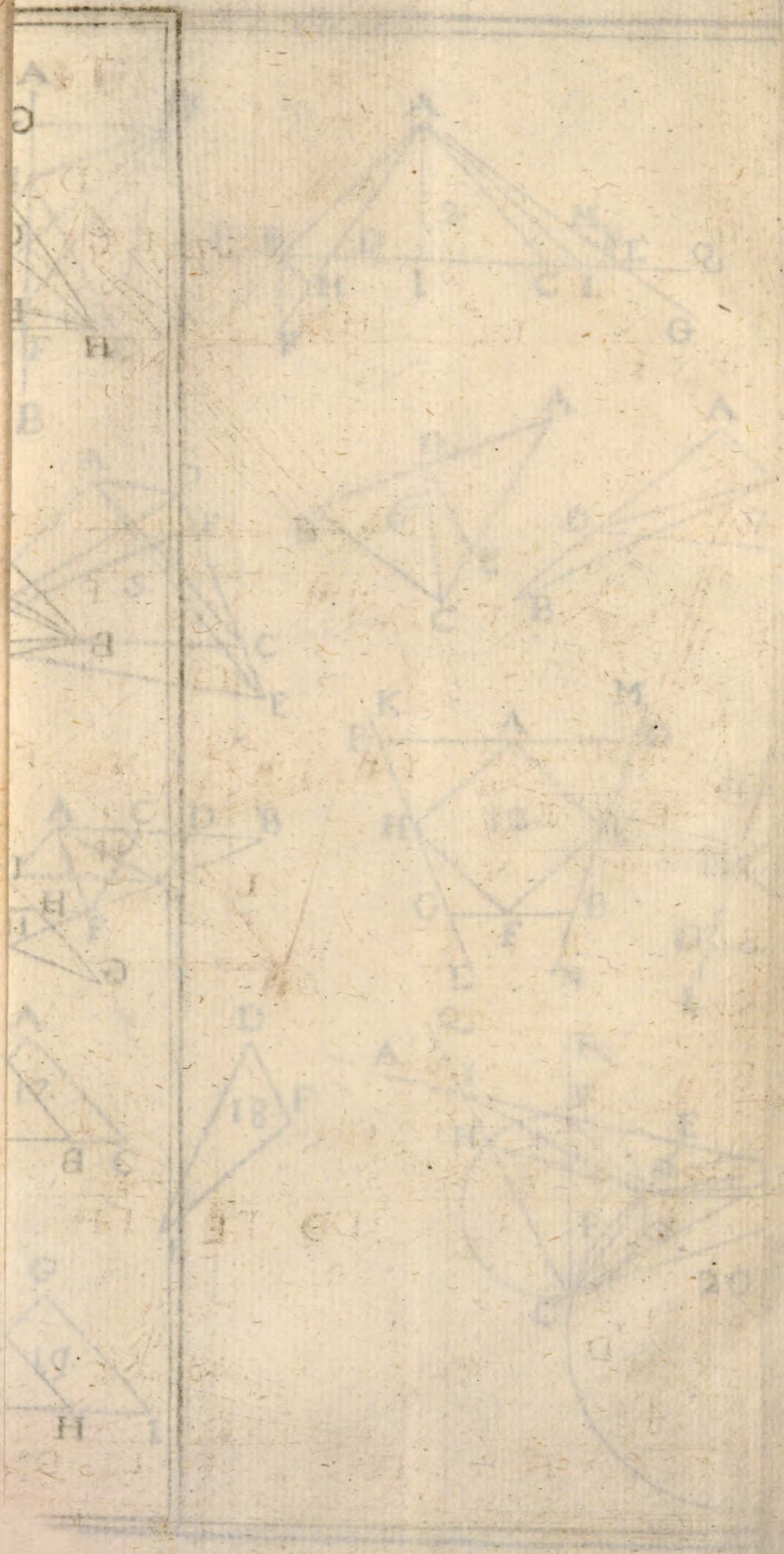
$2\overline{HQ}^2$
 $2\overline{HS}^2$

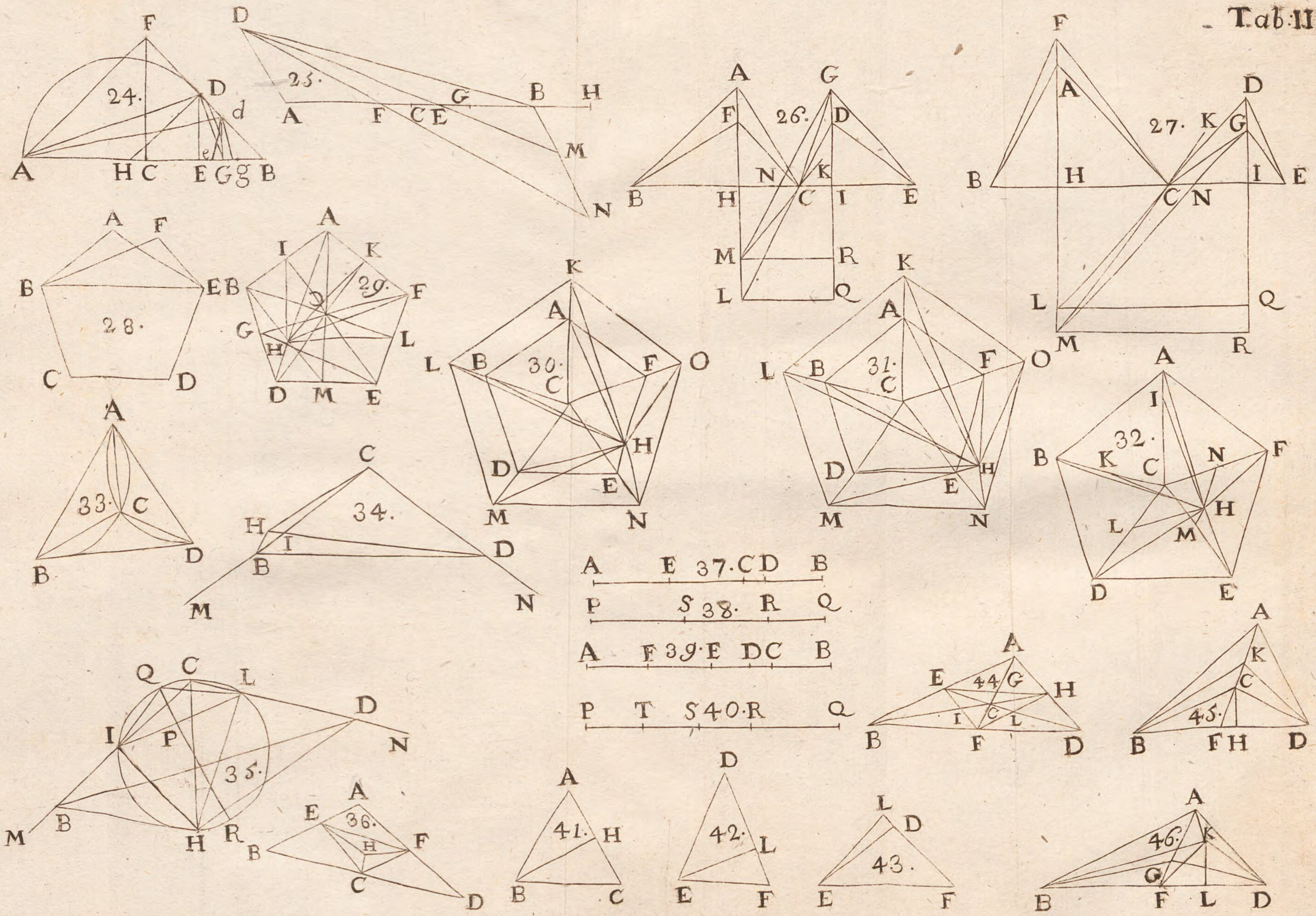
$\overline{BD}^2 \triangleleft$
 dico
 AC : CD
 BDEF

$\overline{DB}^3$ sunt

$\overline{CB}^3$
 ut in figuris
 349. Inter



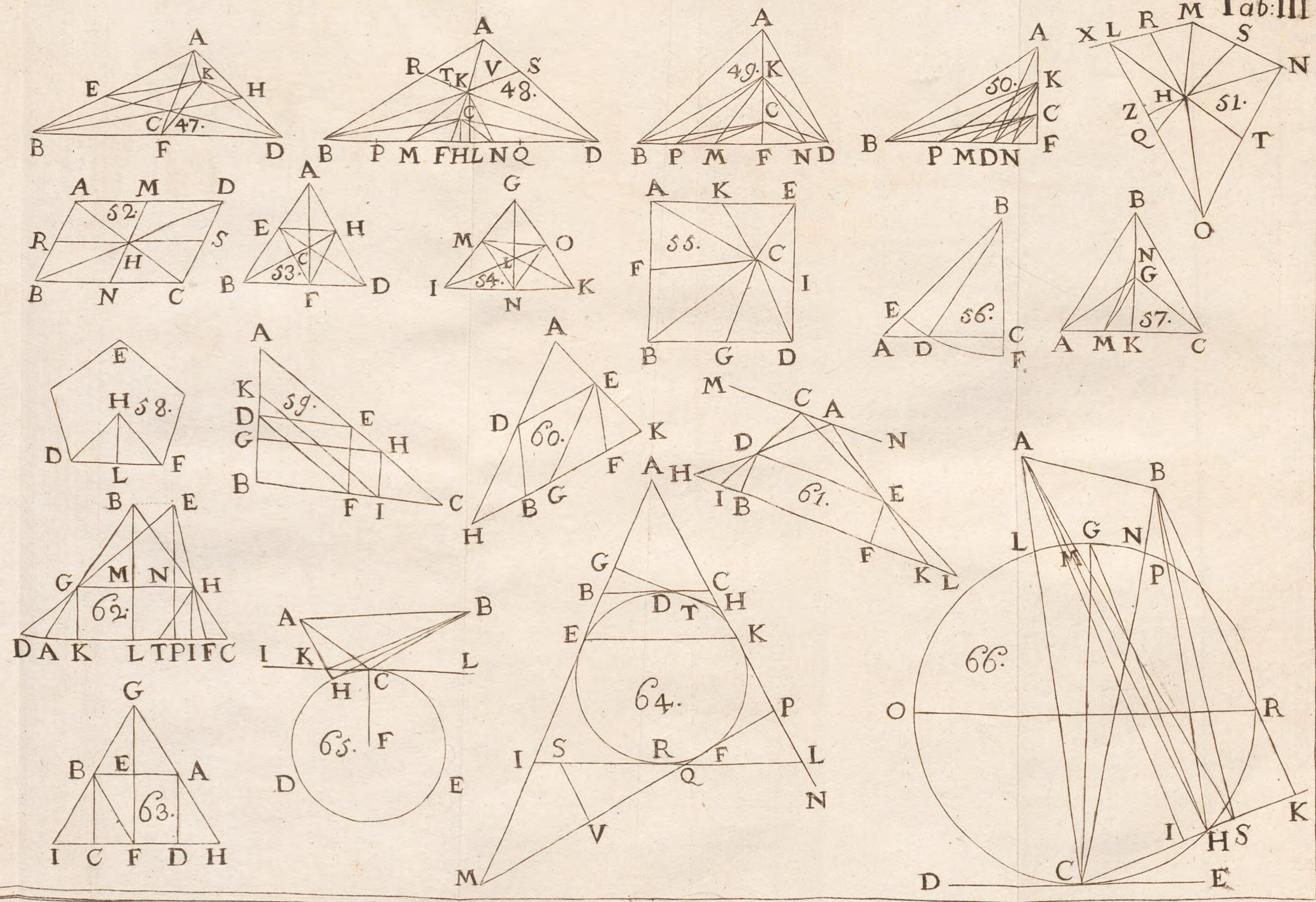




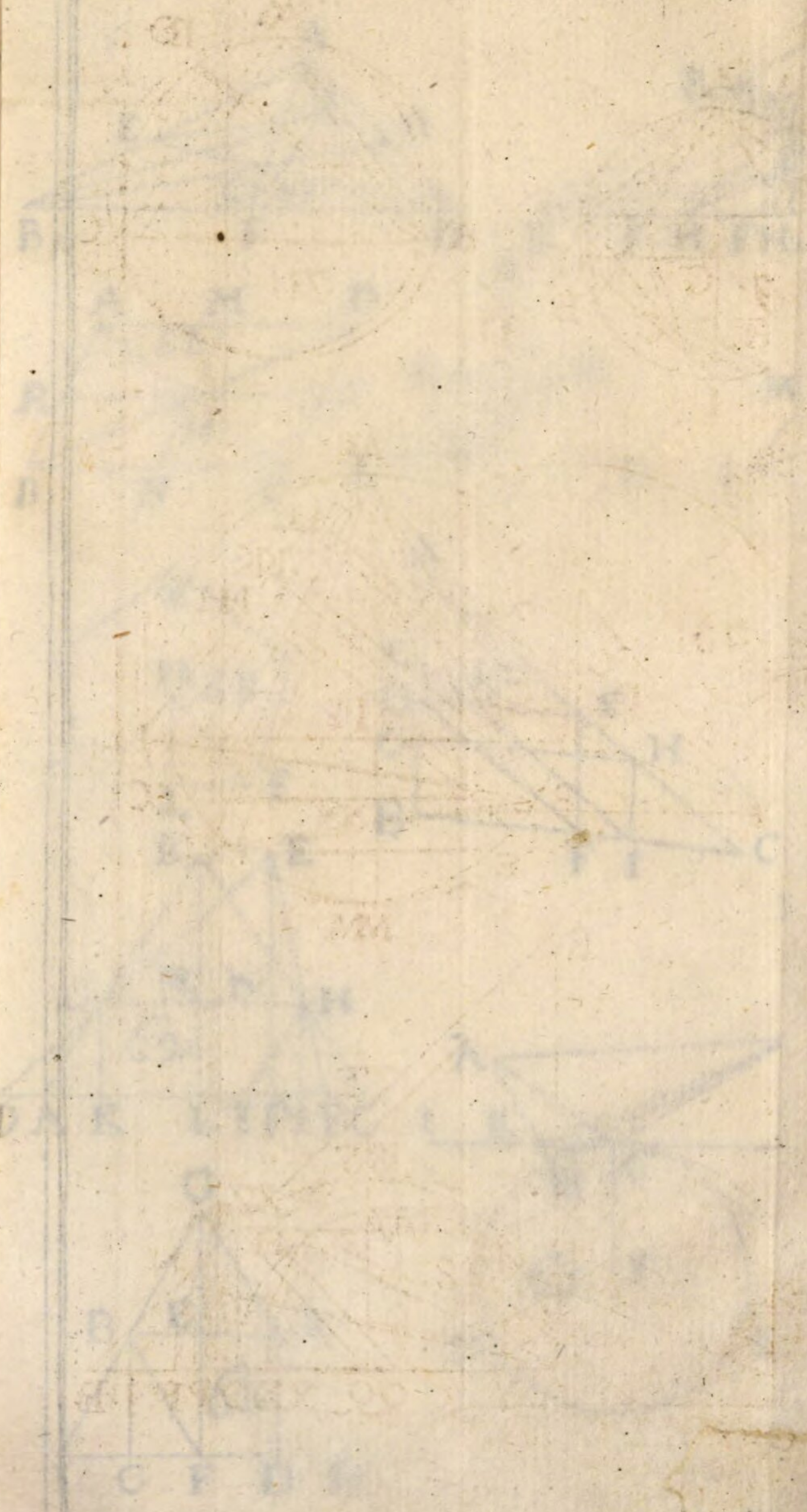
III

E

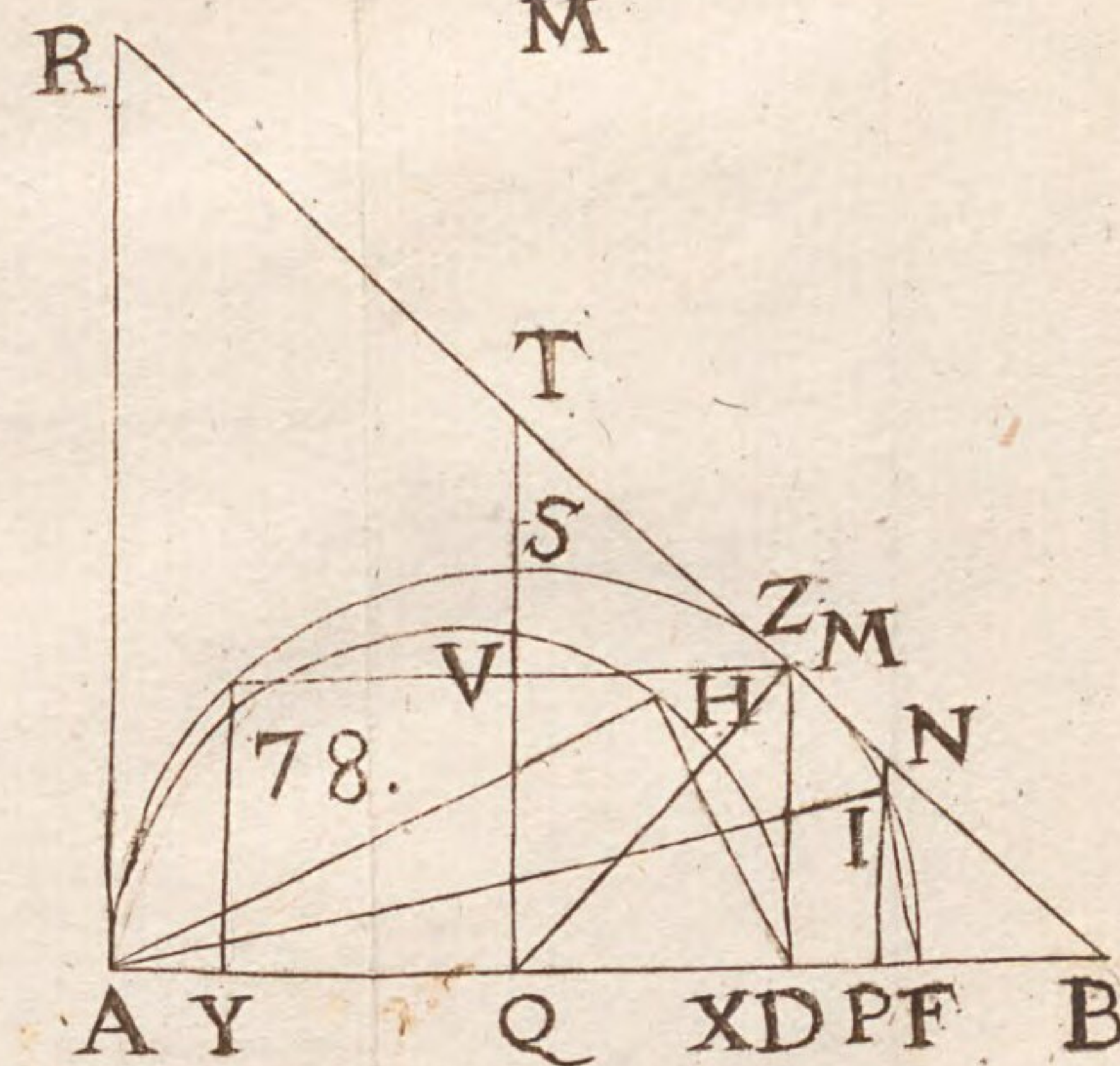
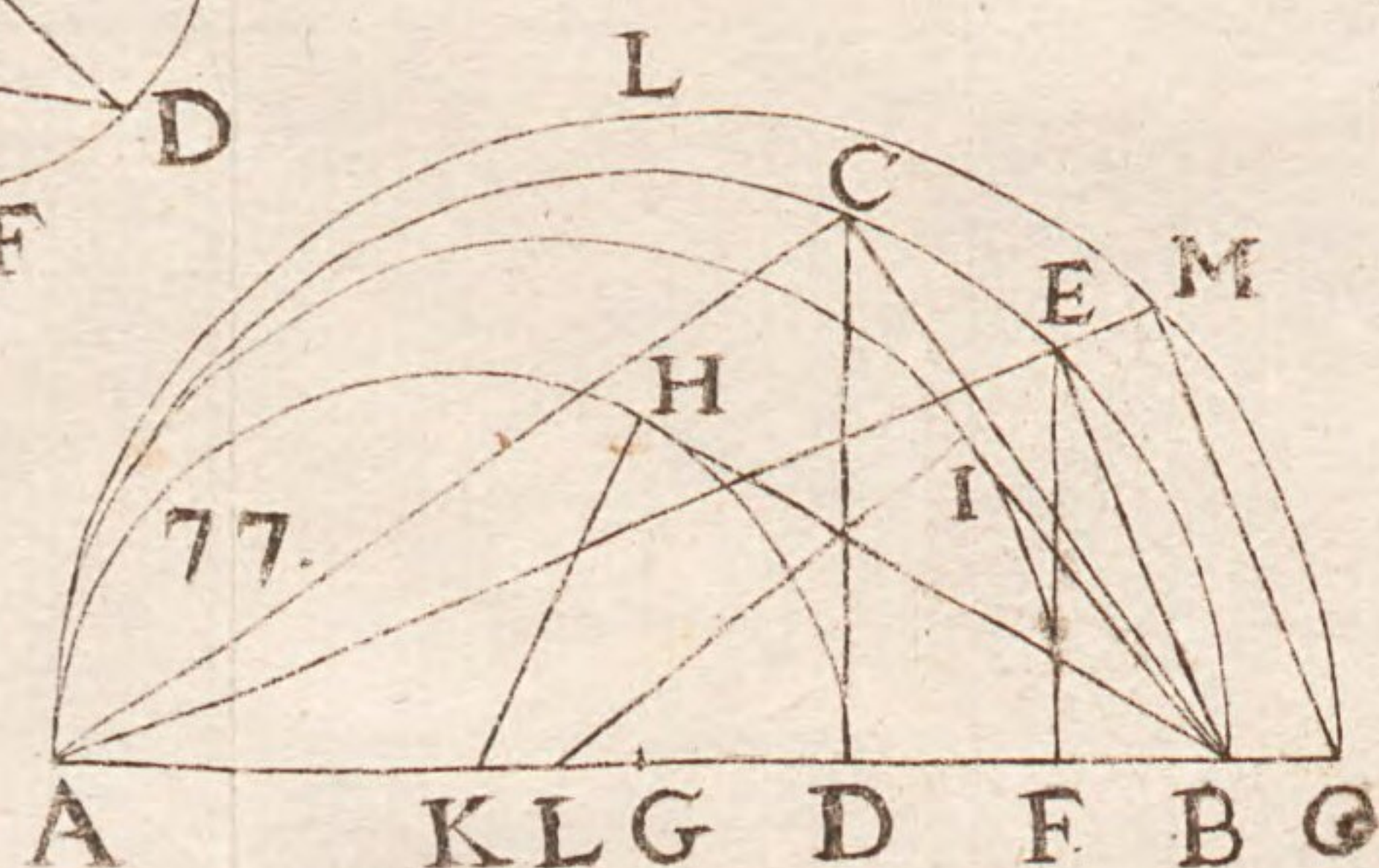
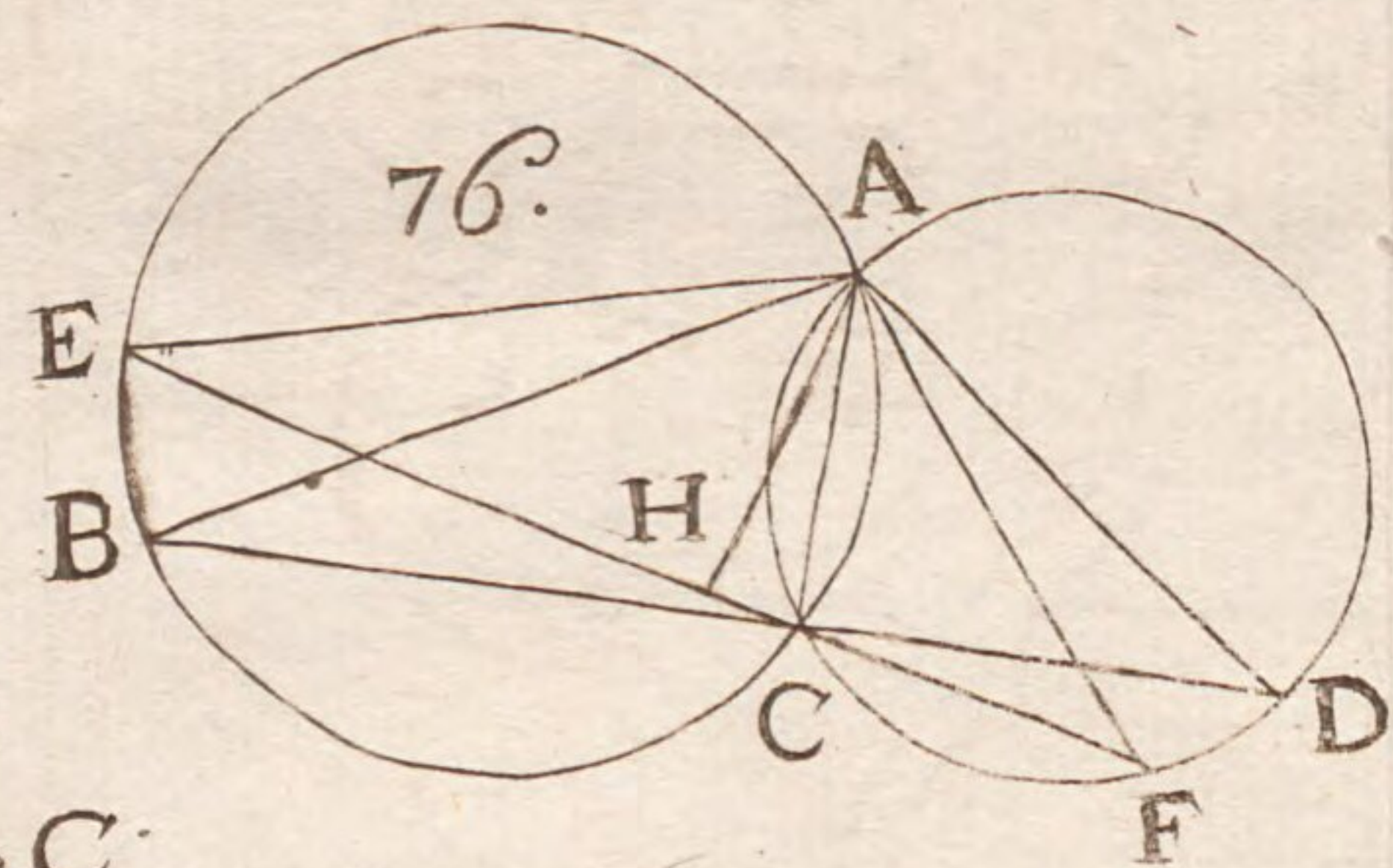
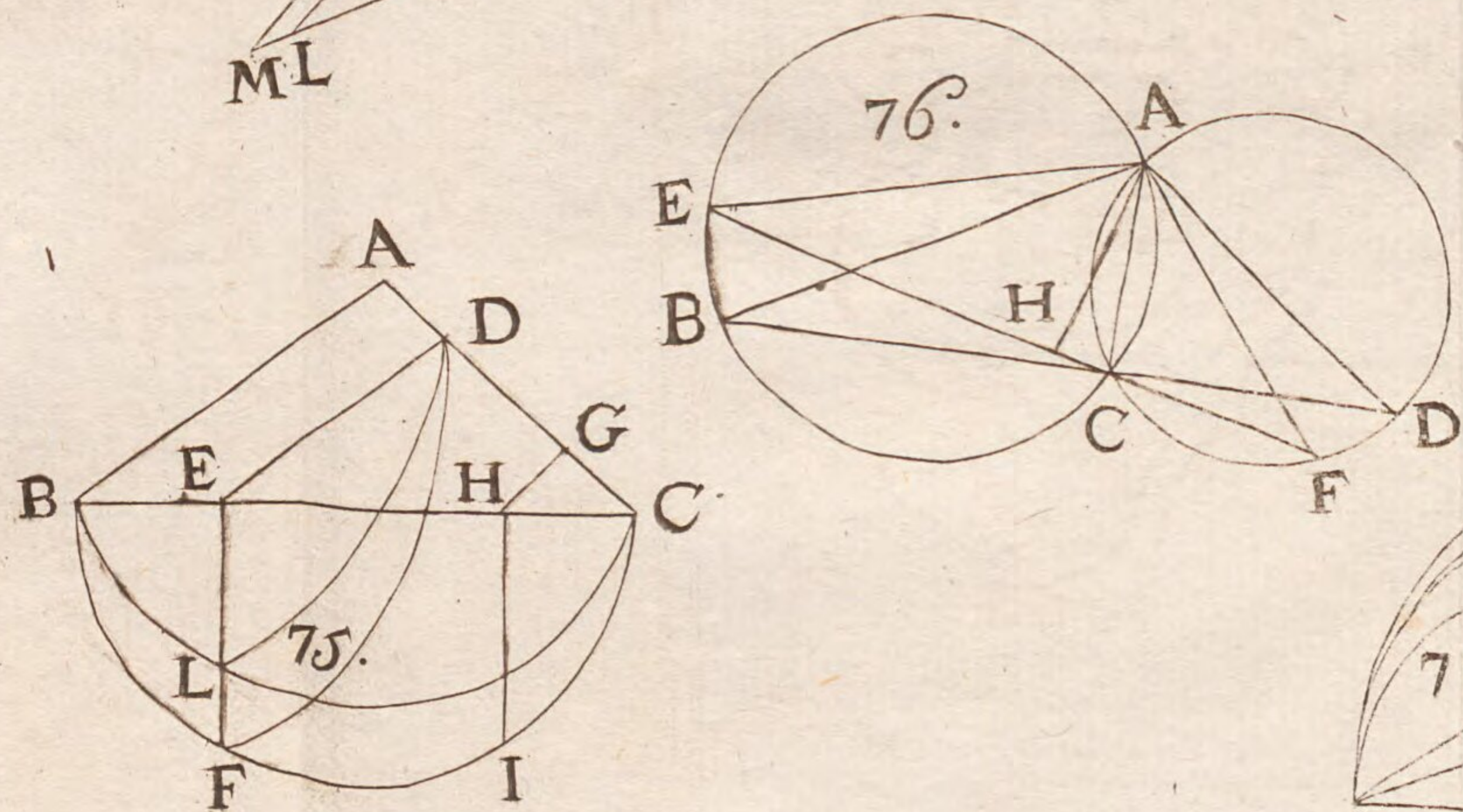
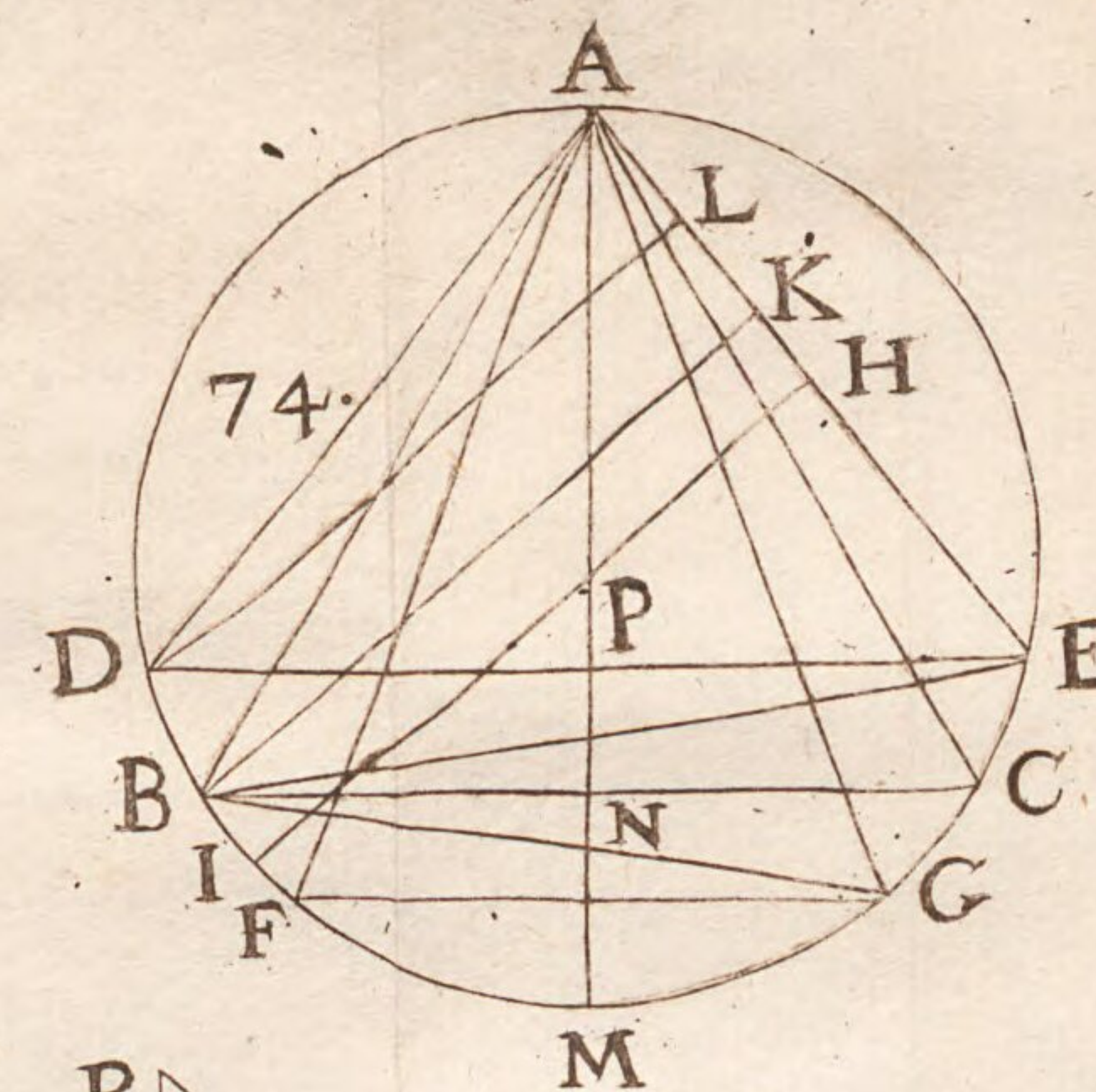
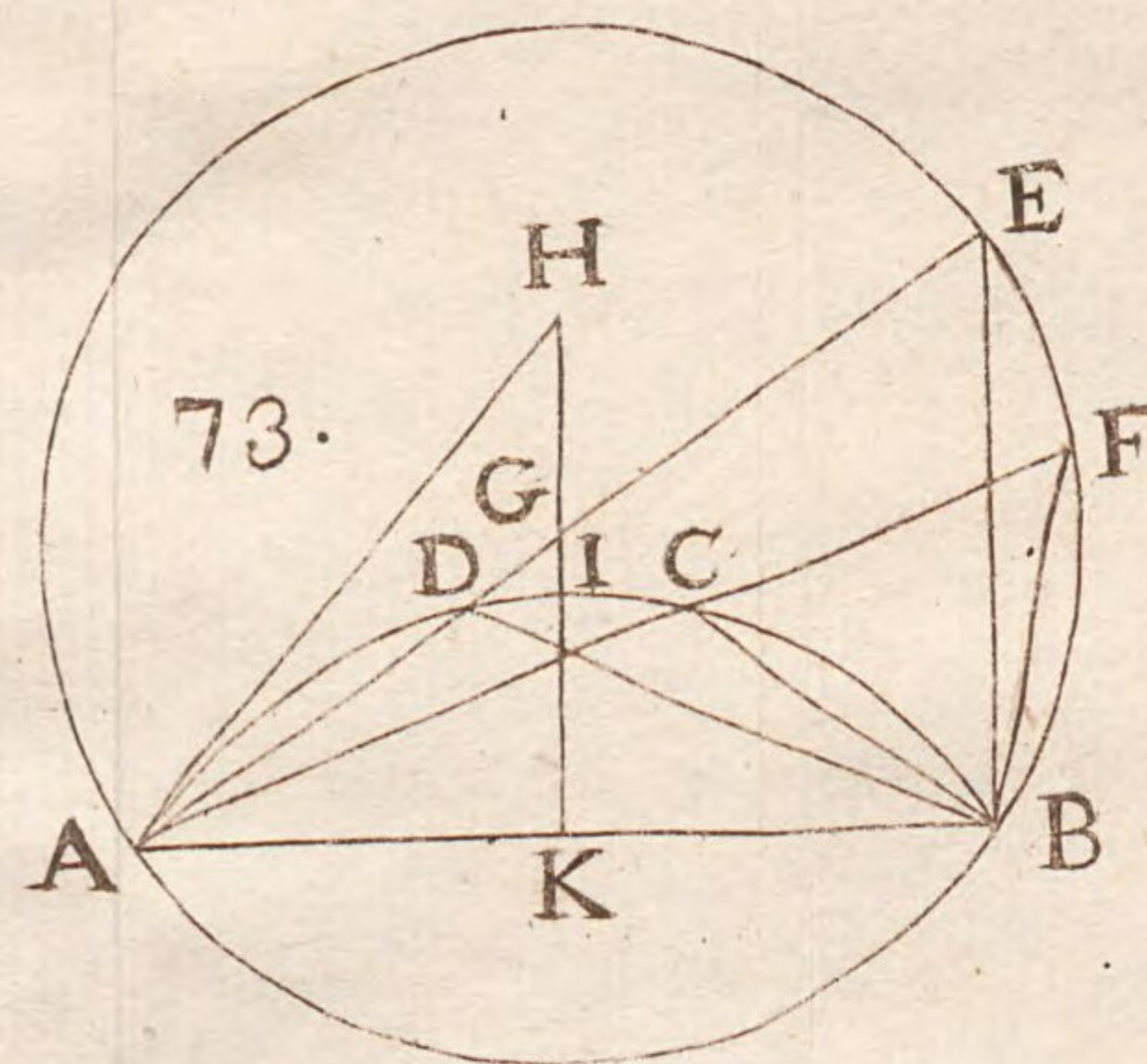
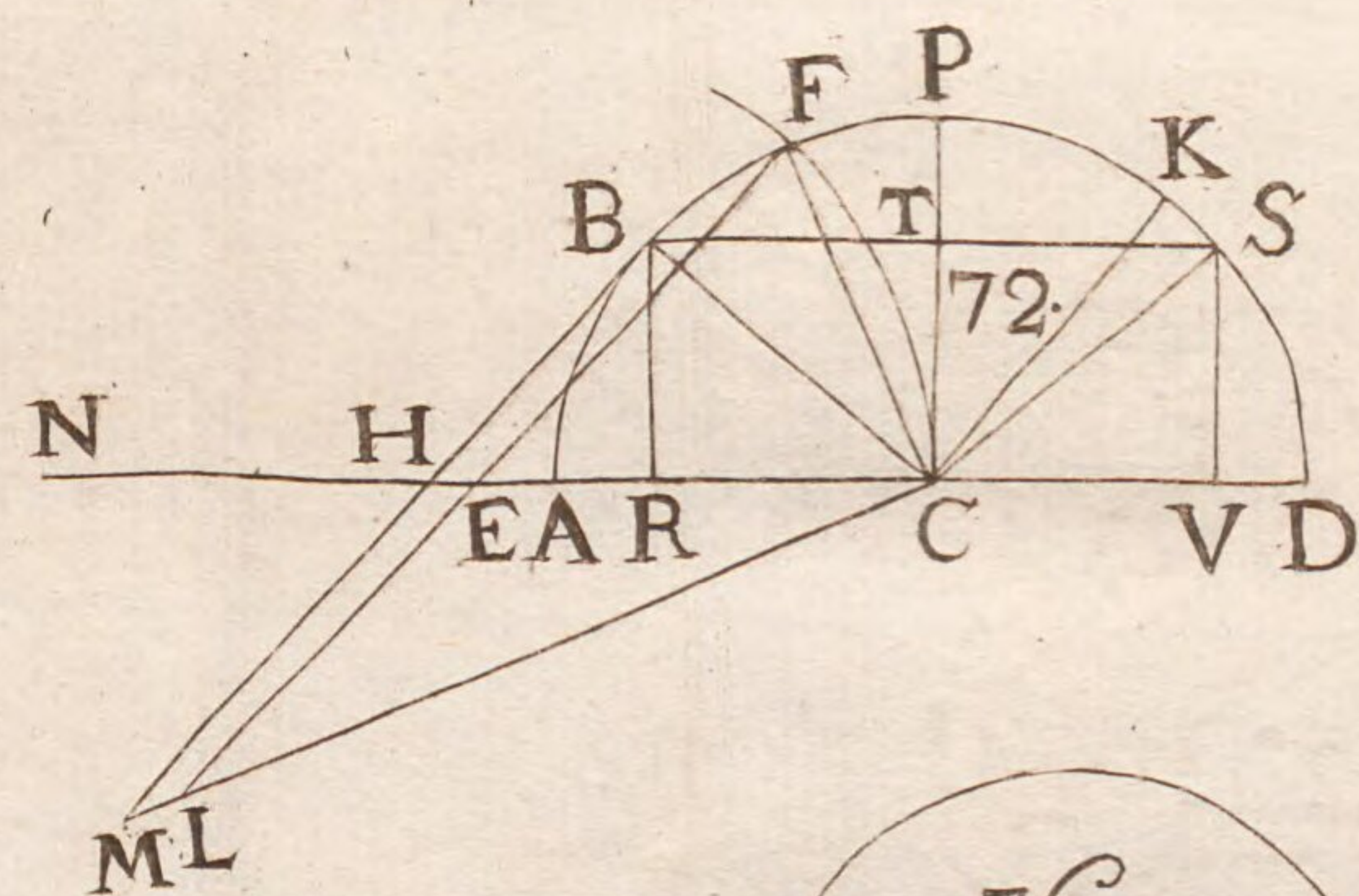
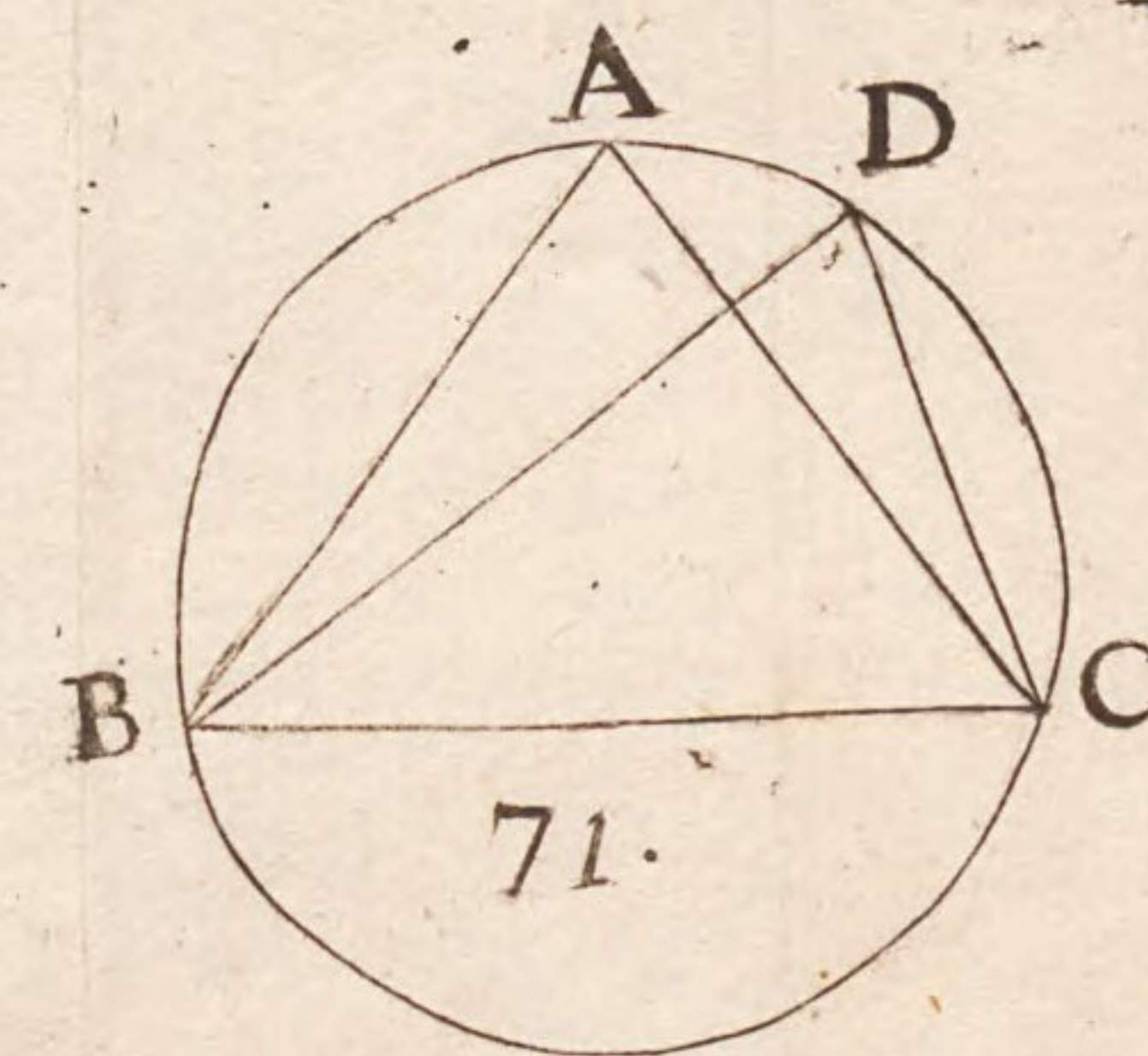
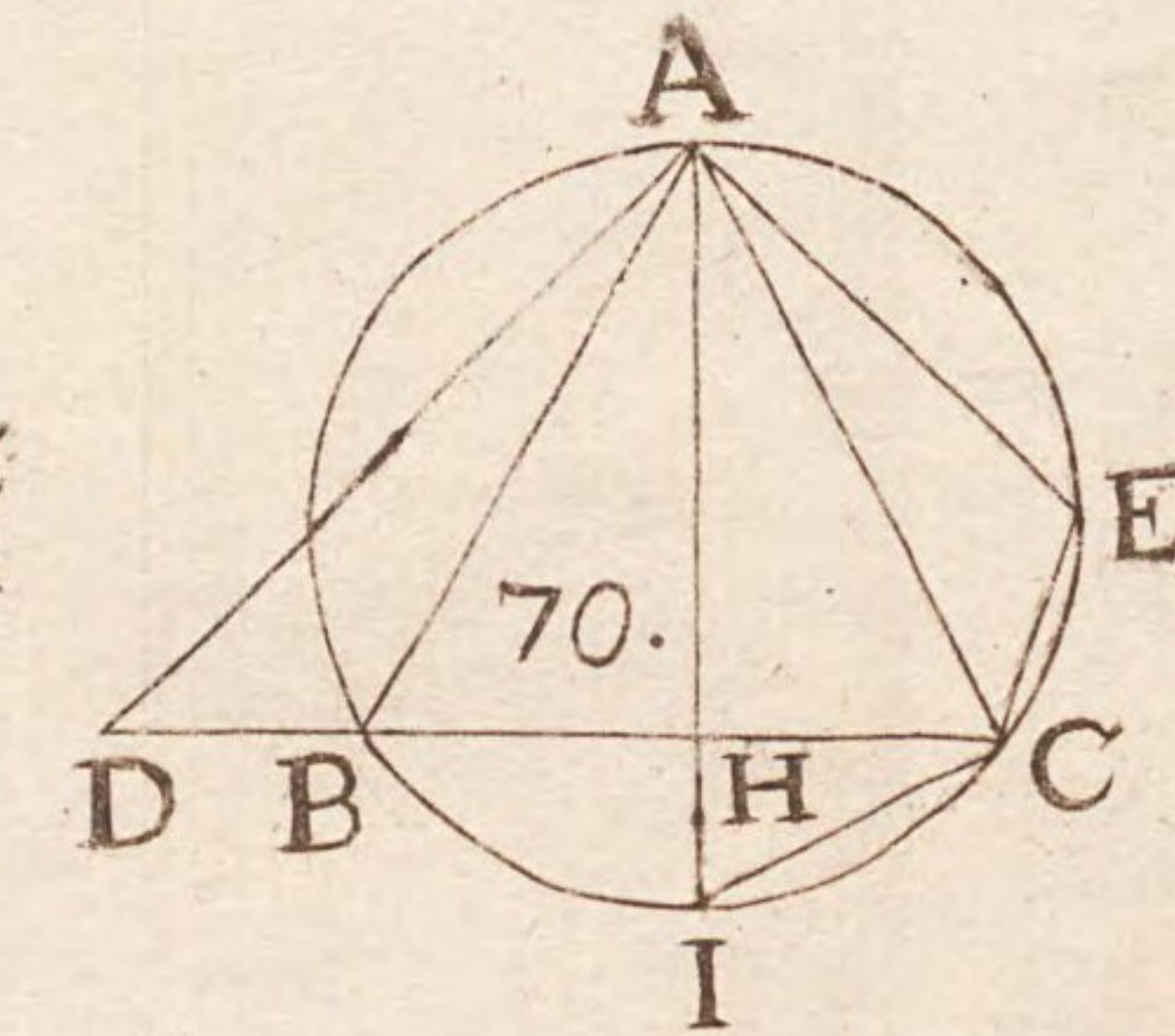
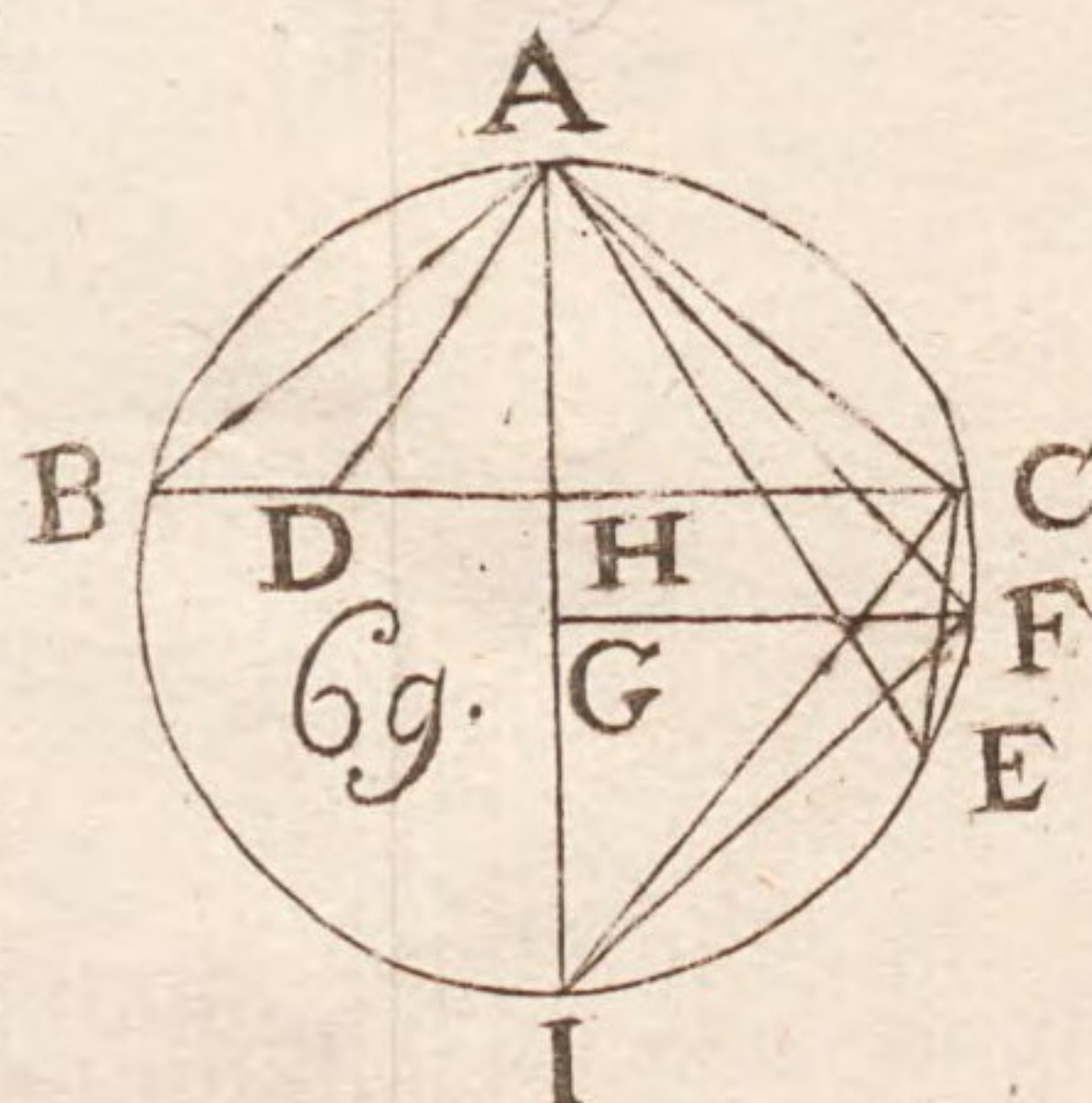
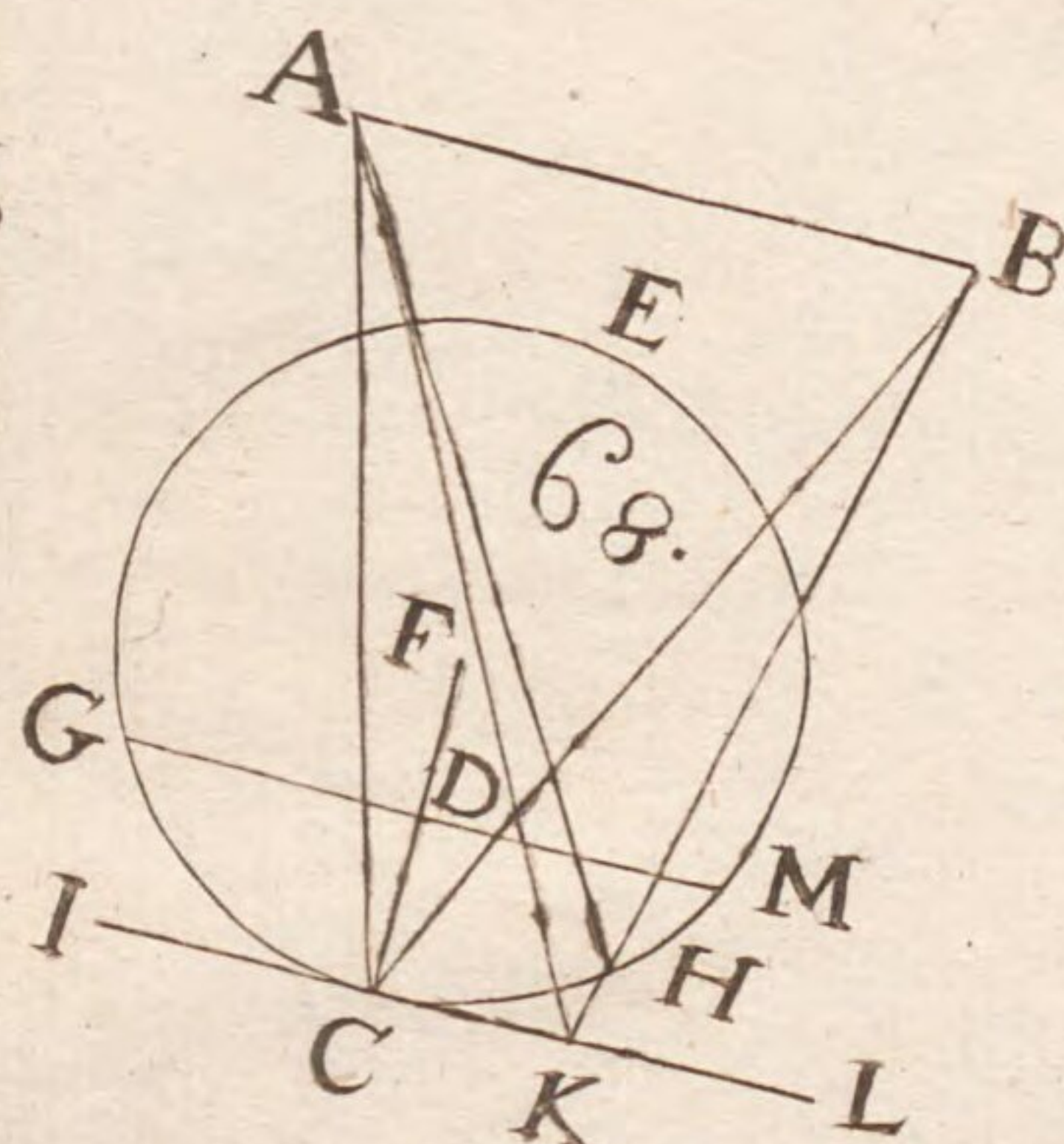
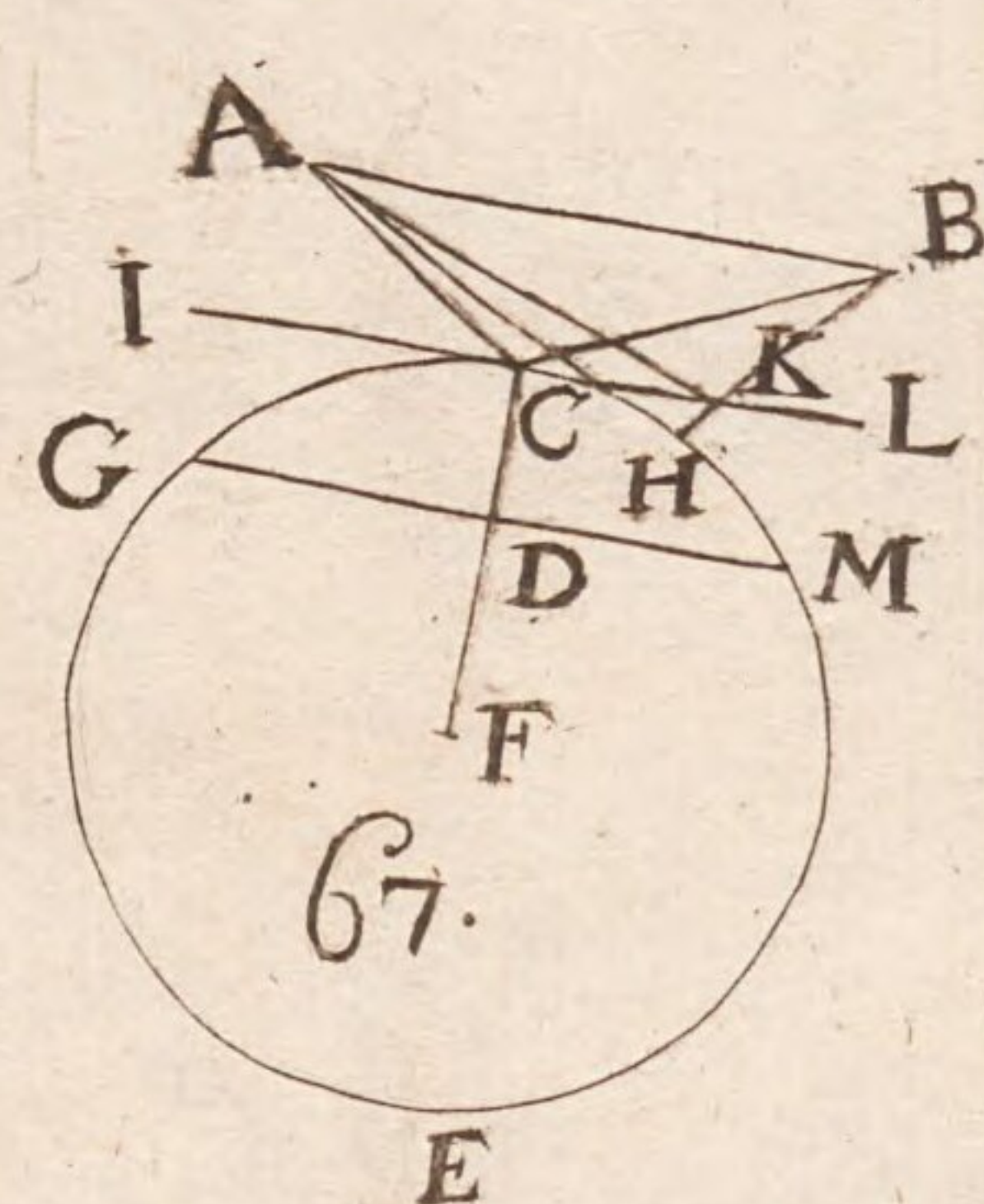
D

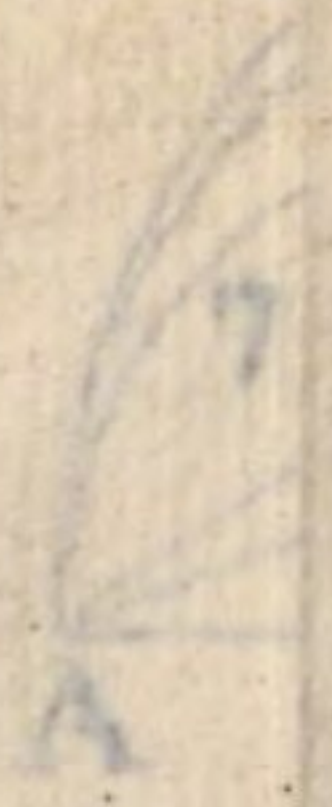
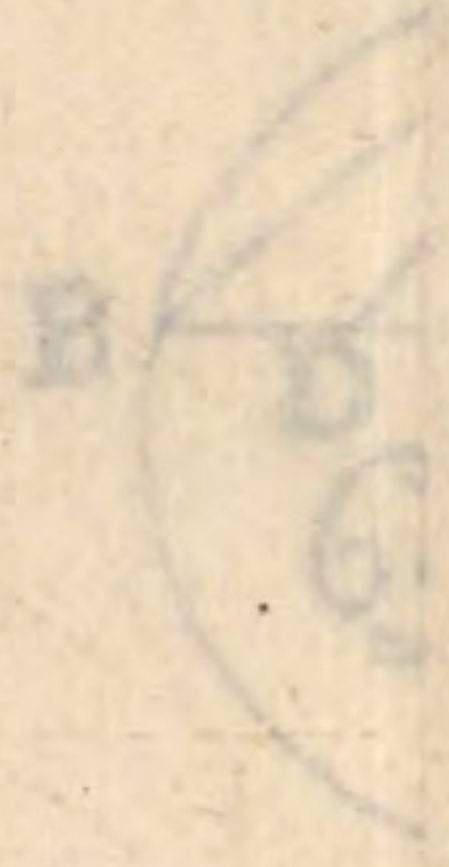


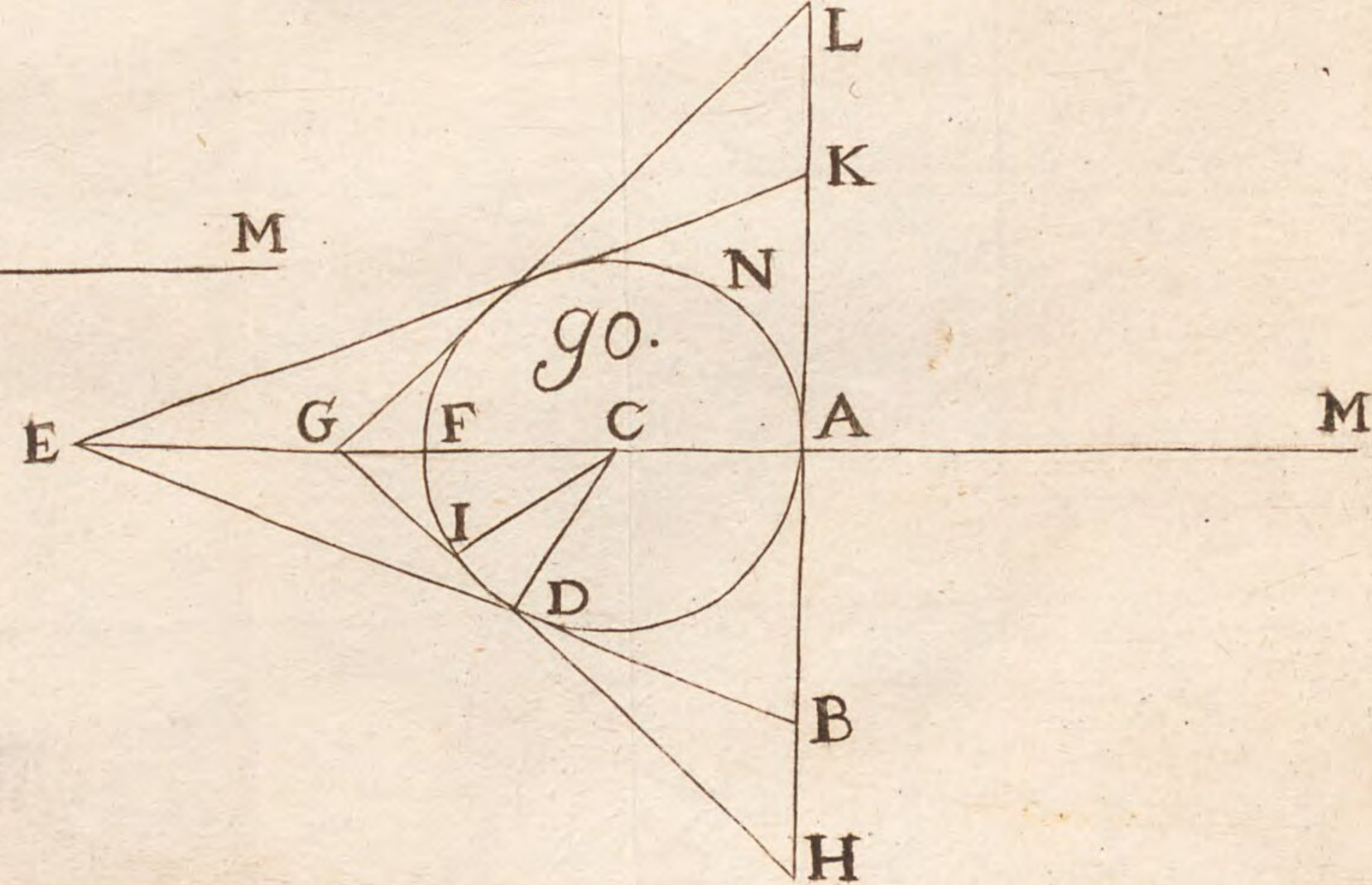
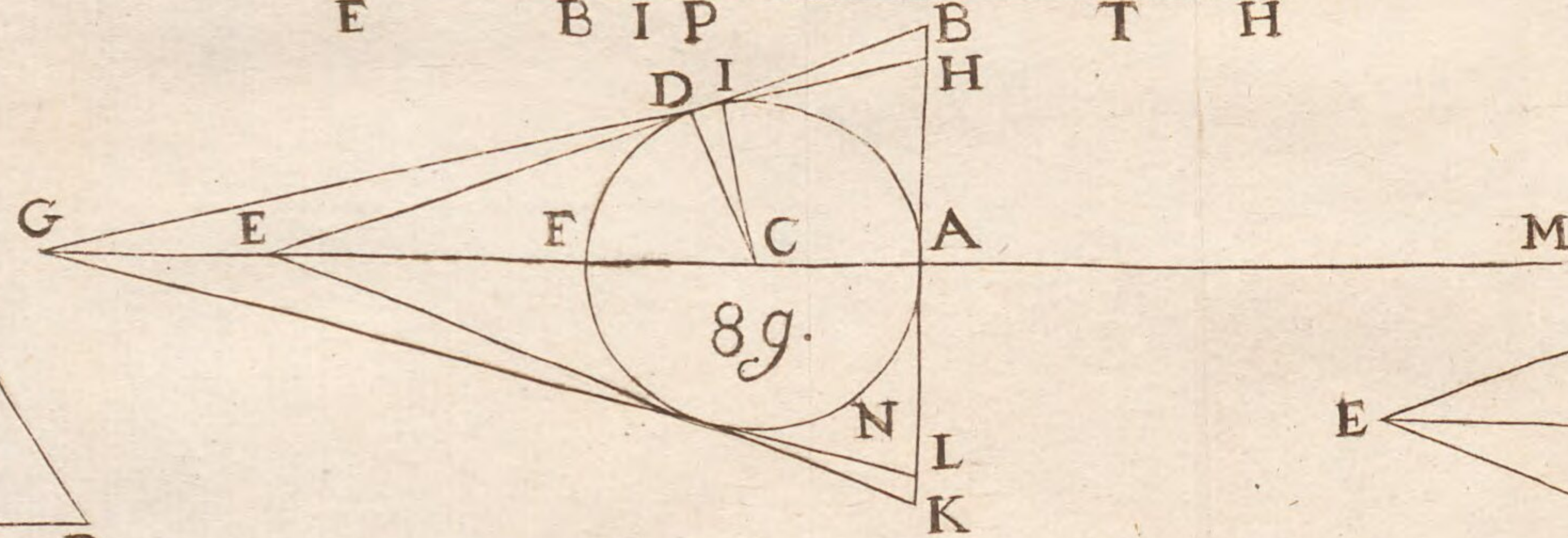
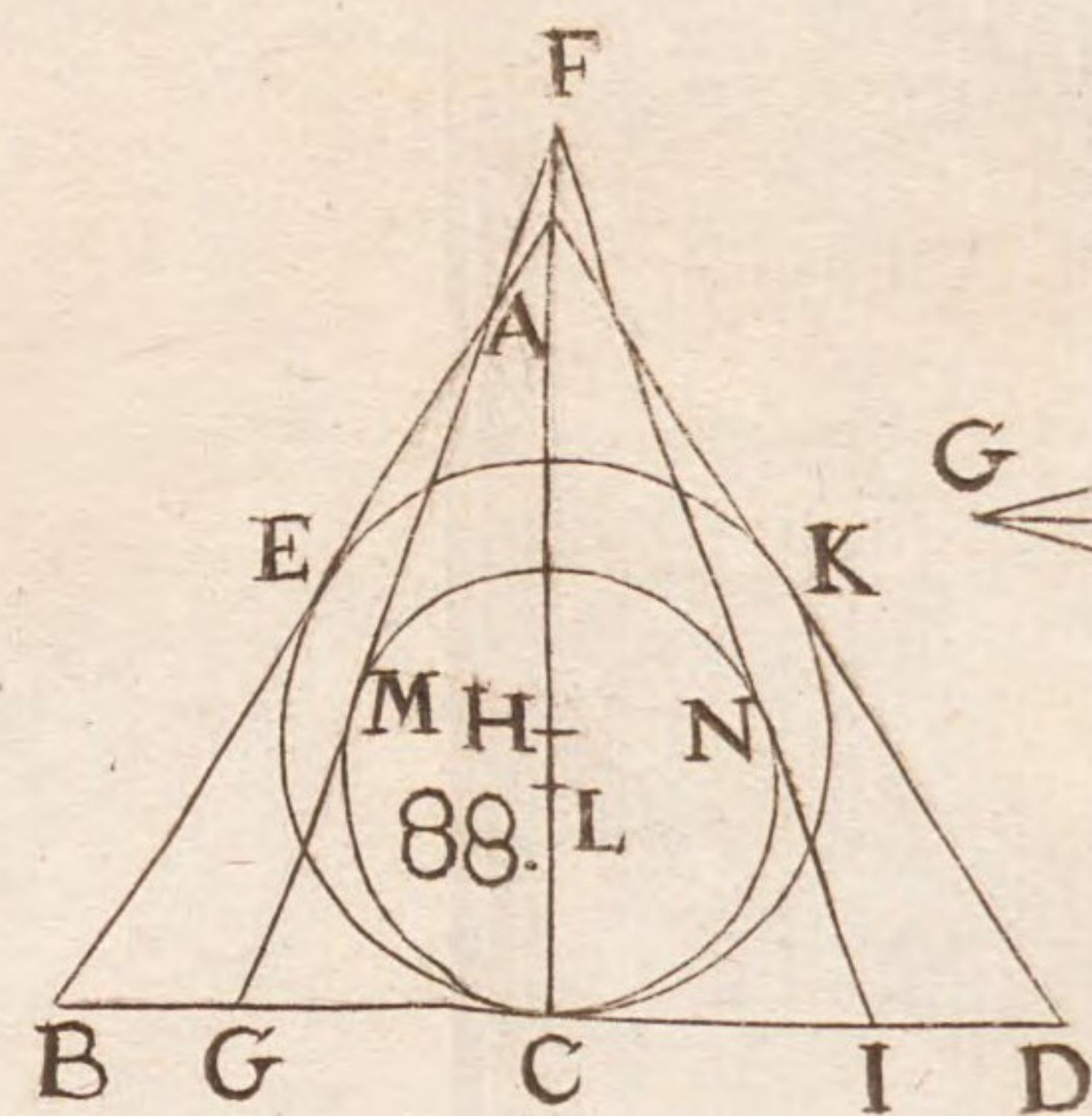
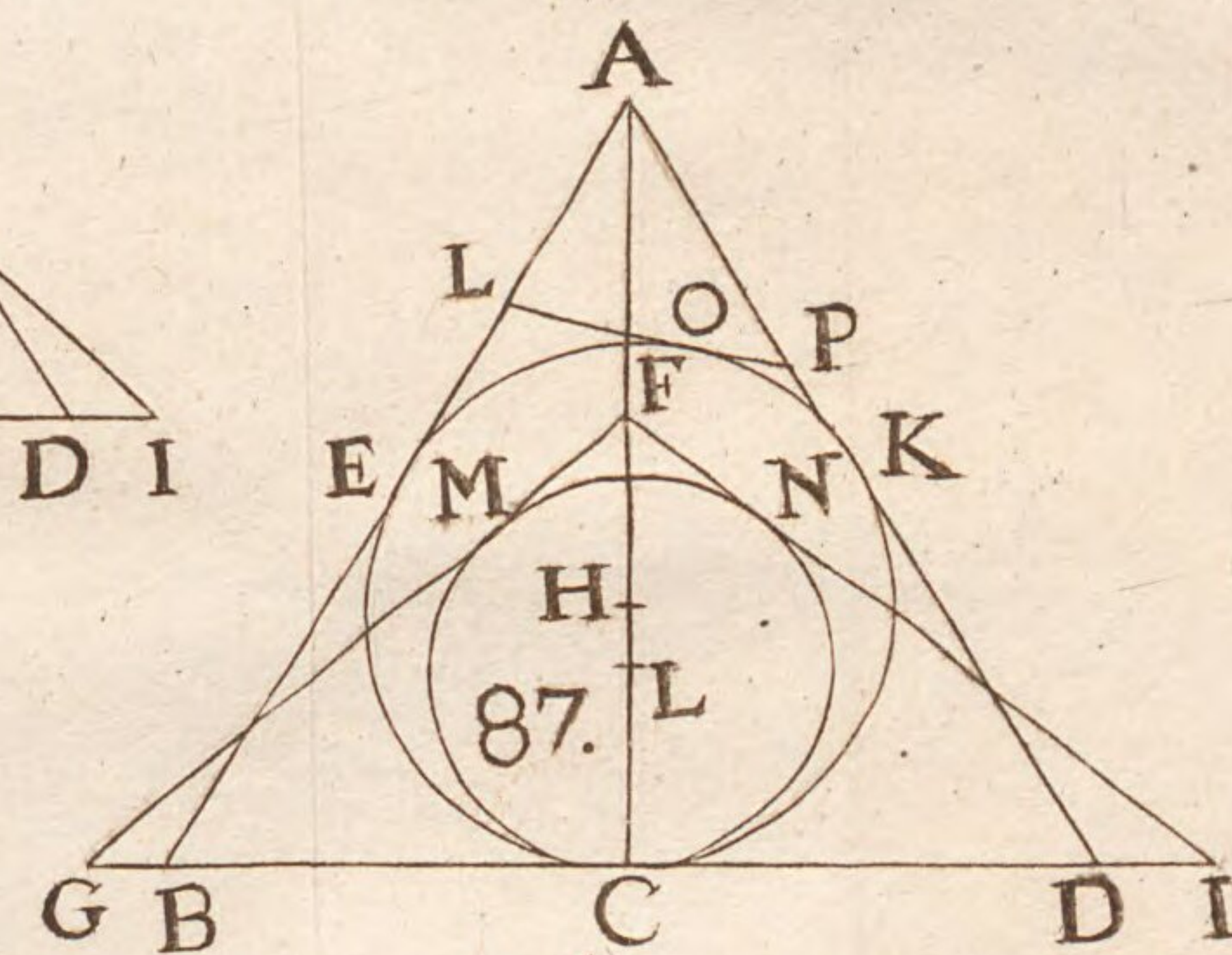
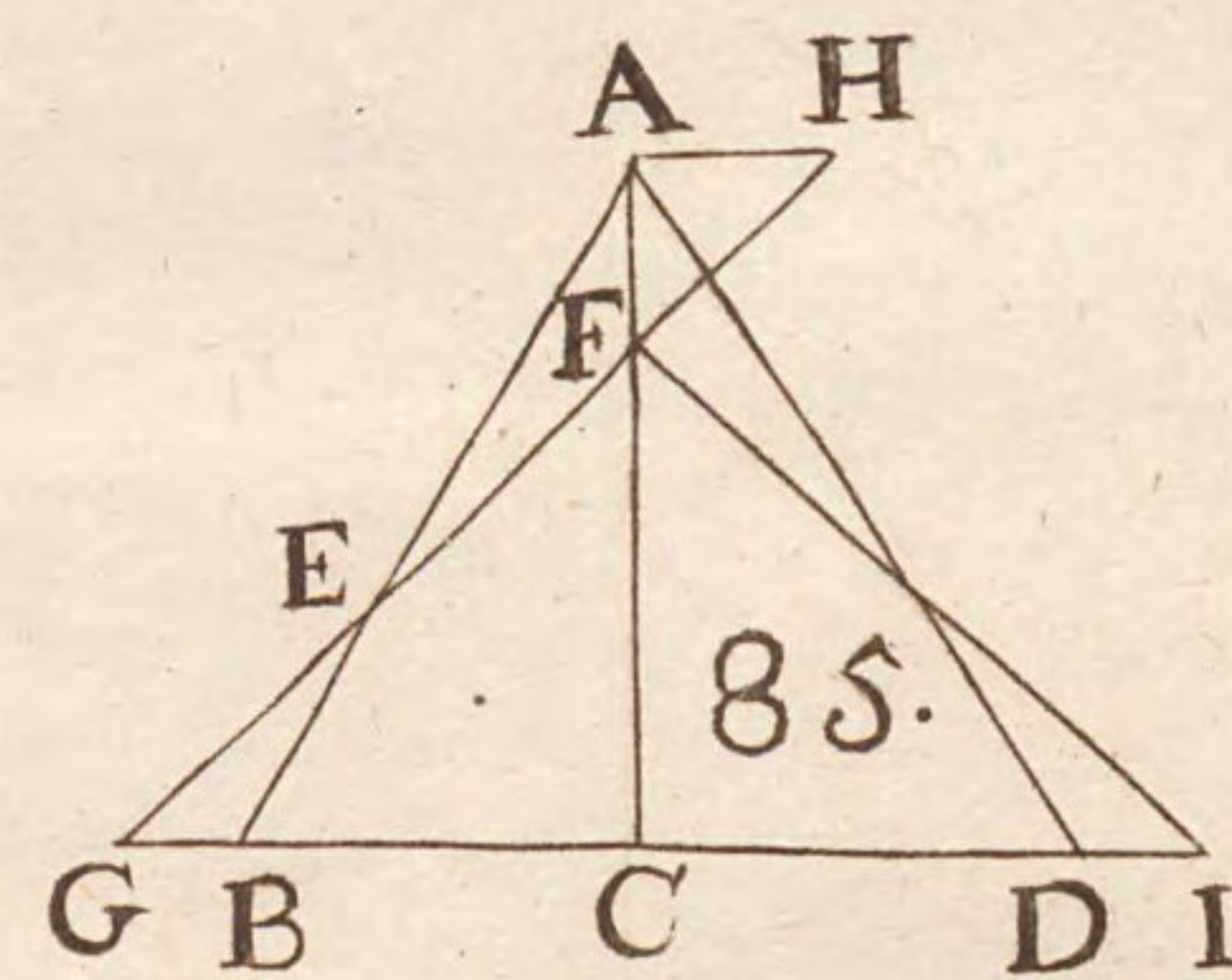
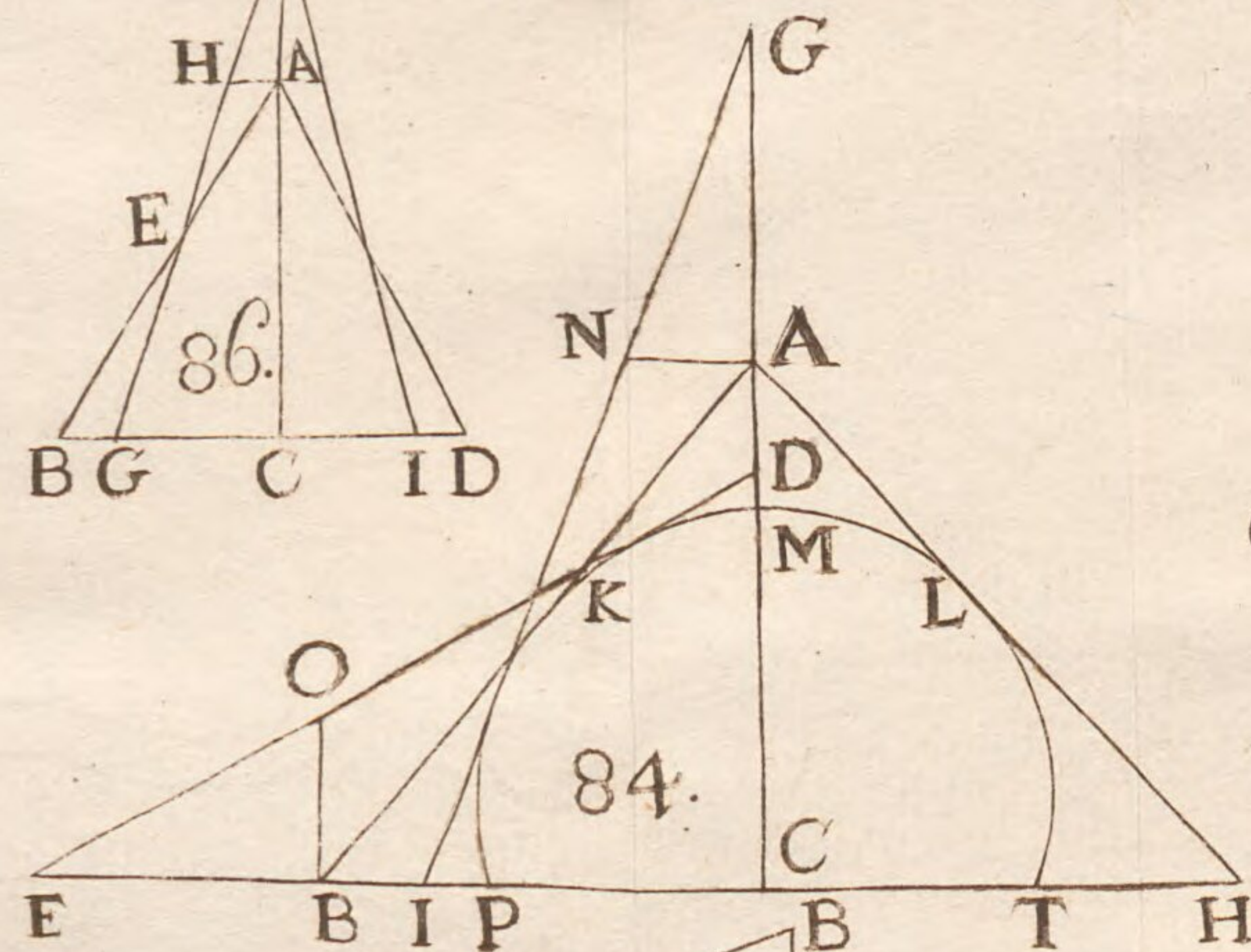
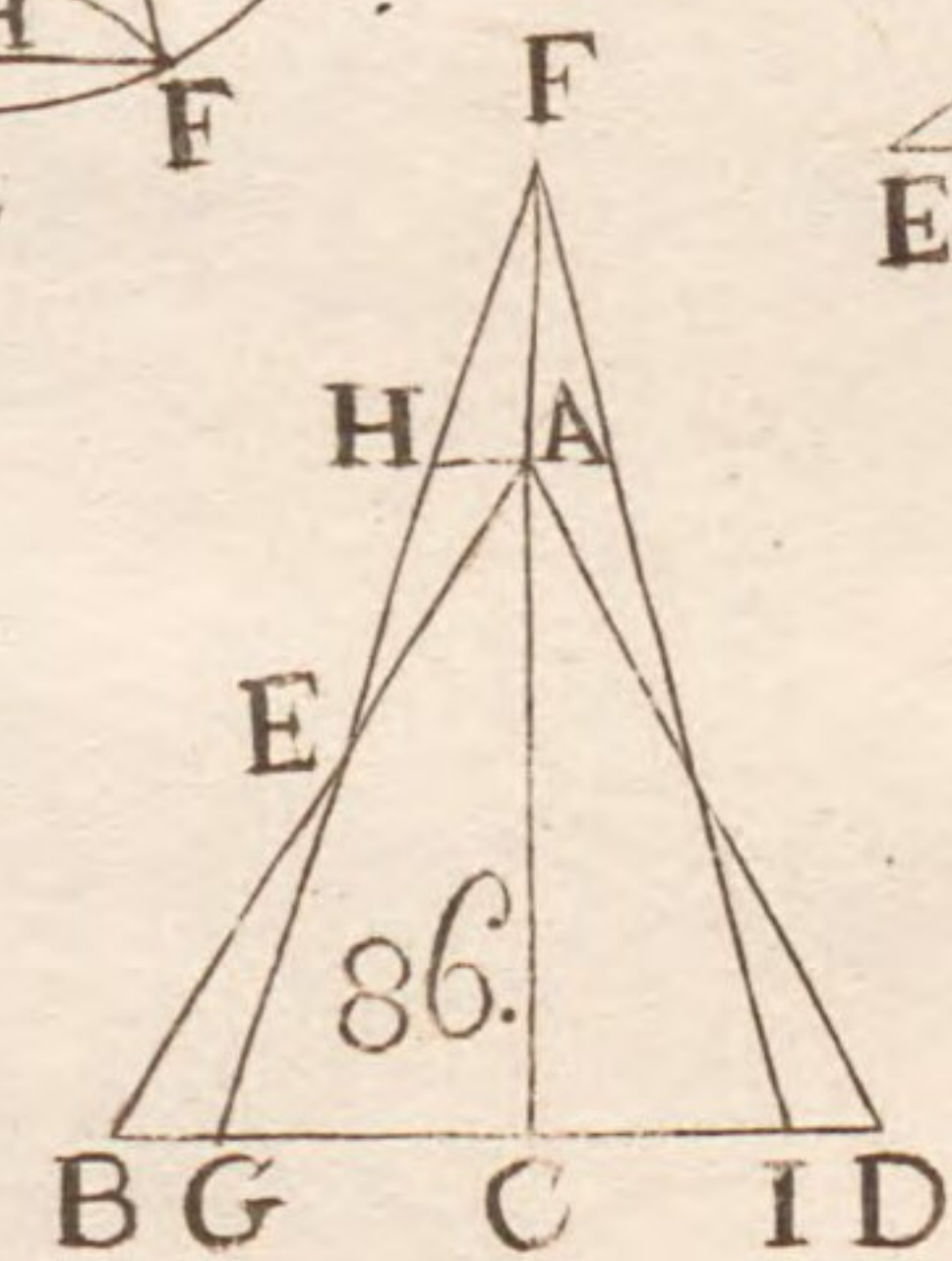
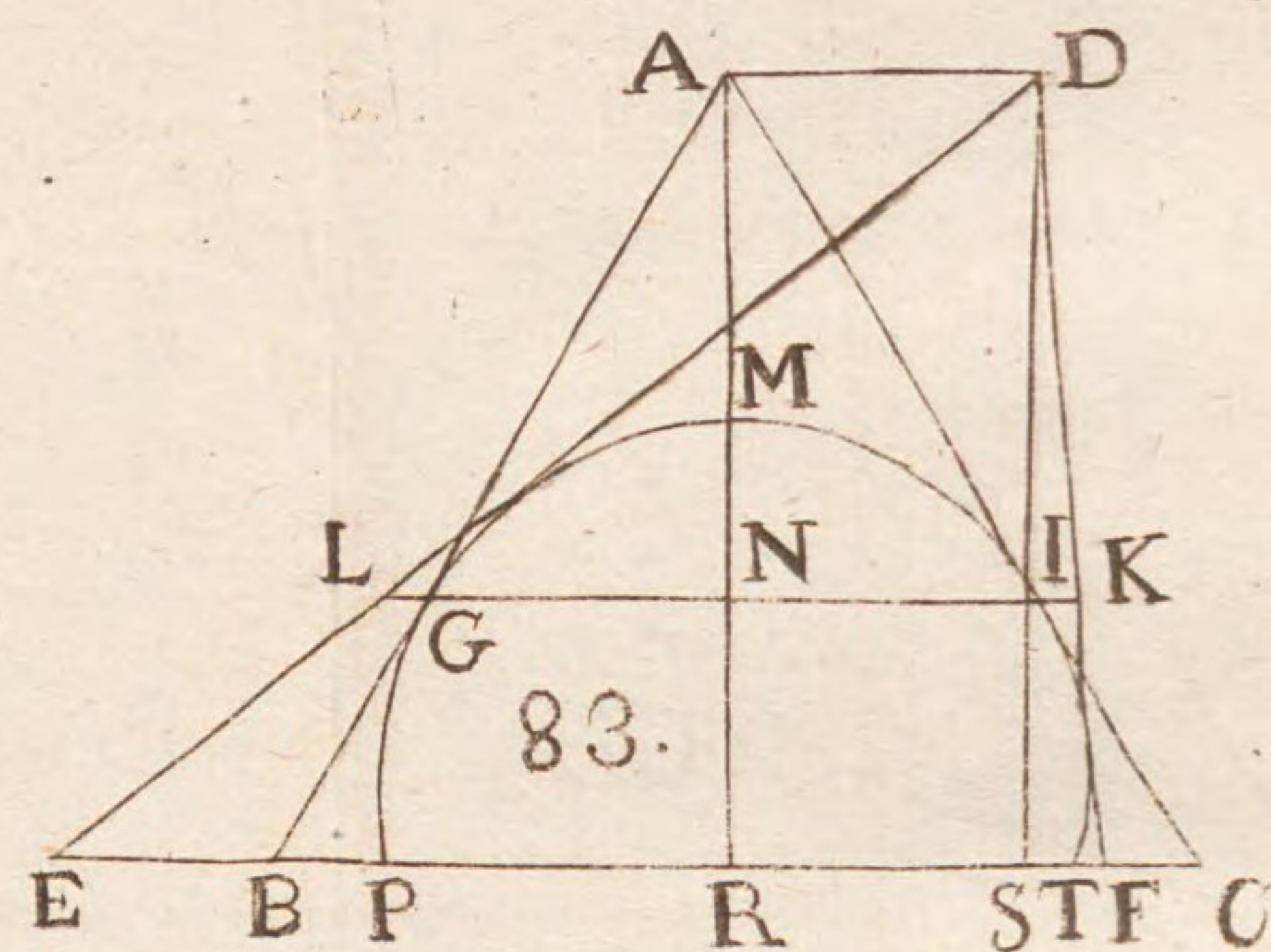
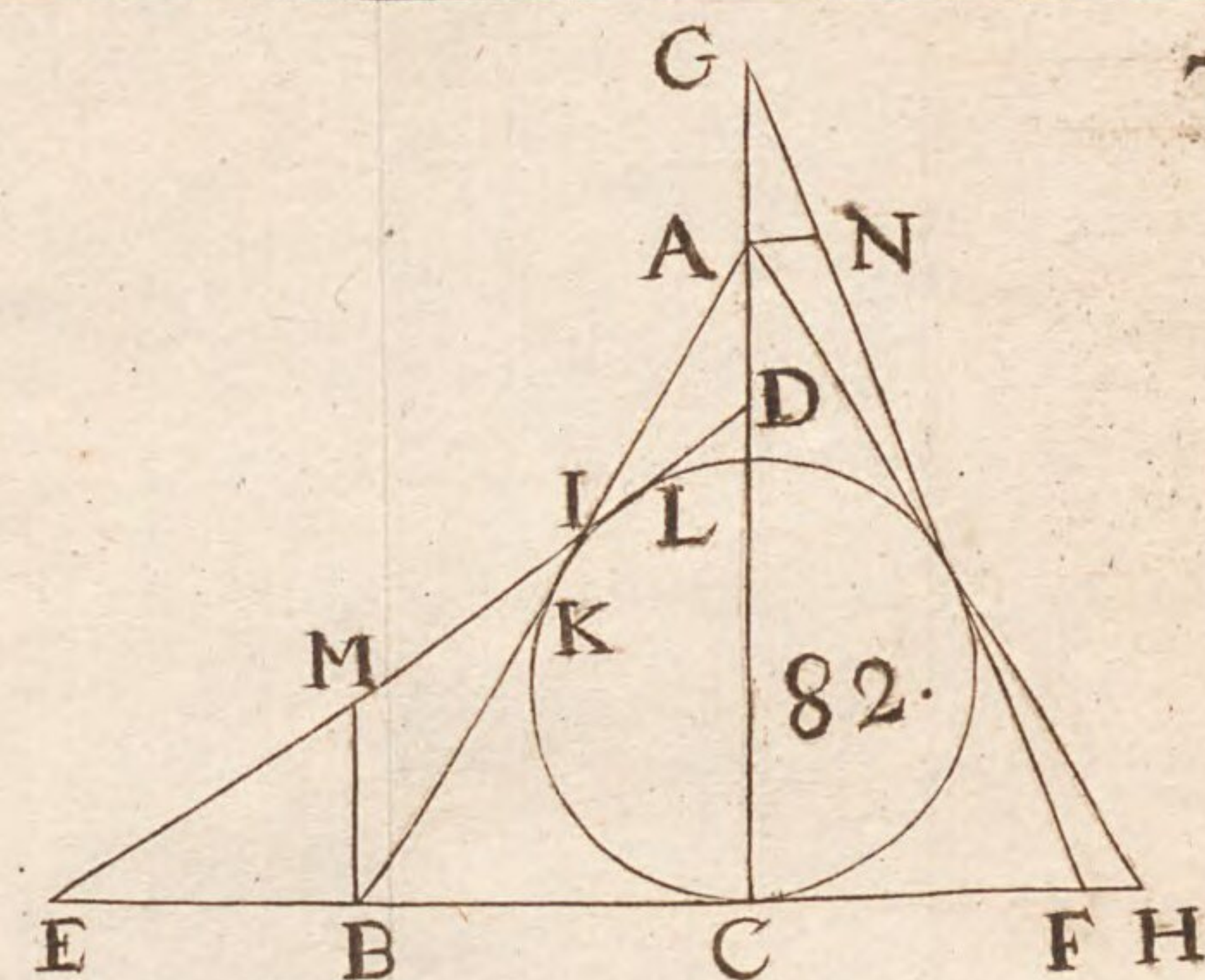
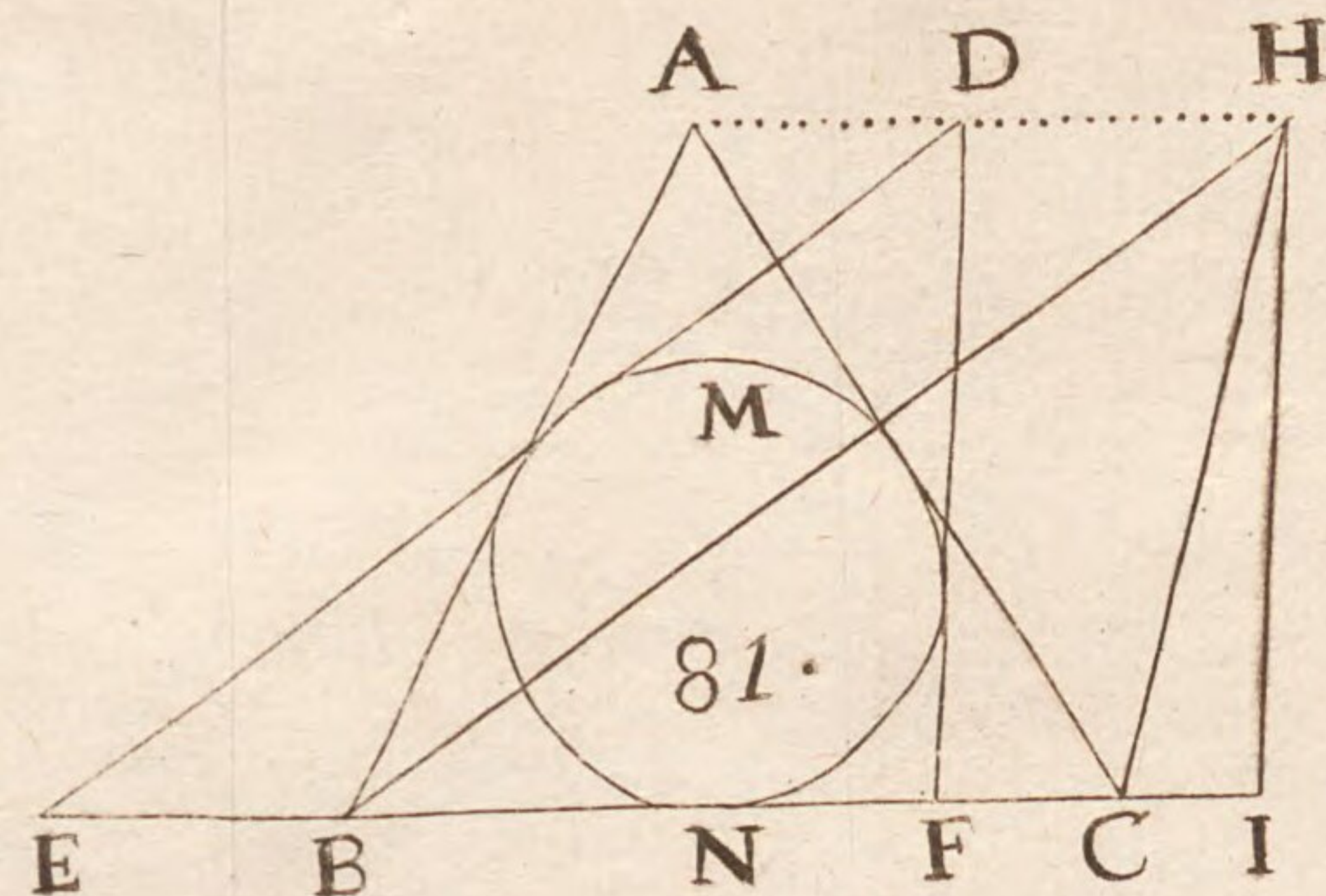
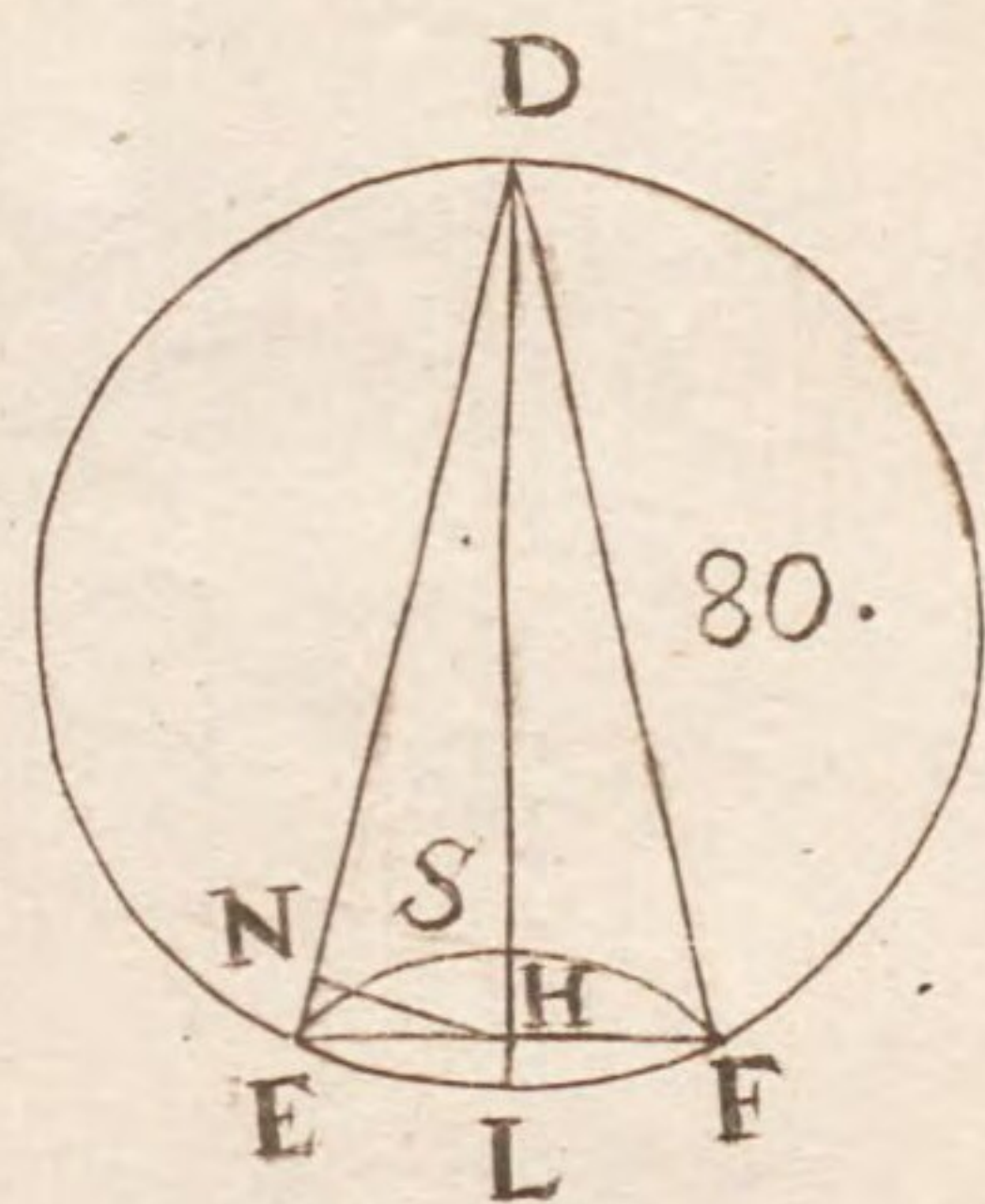
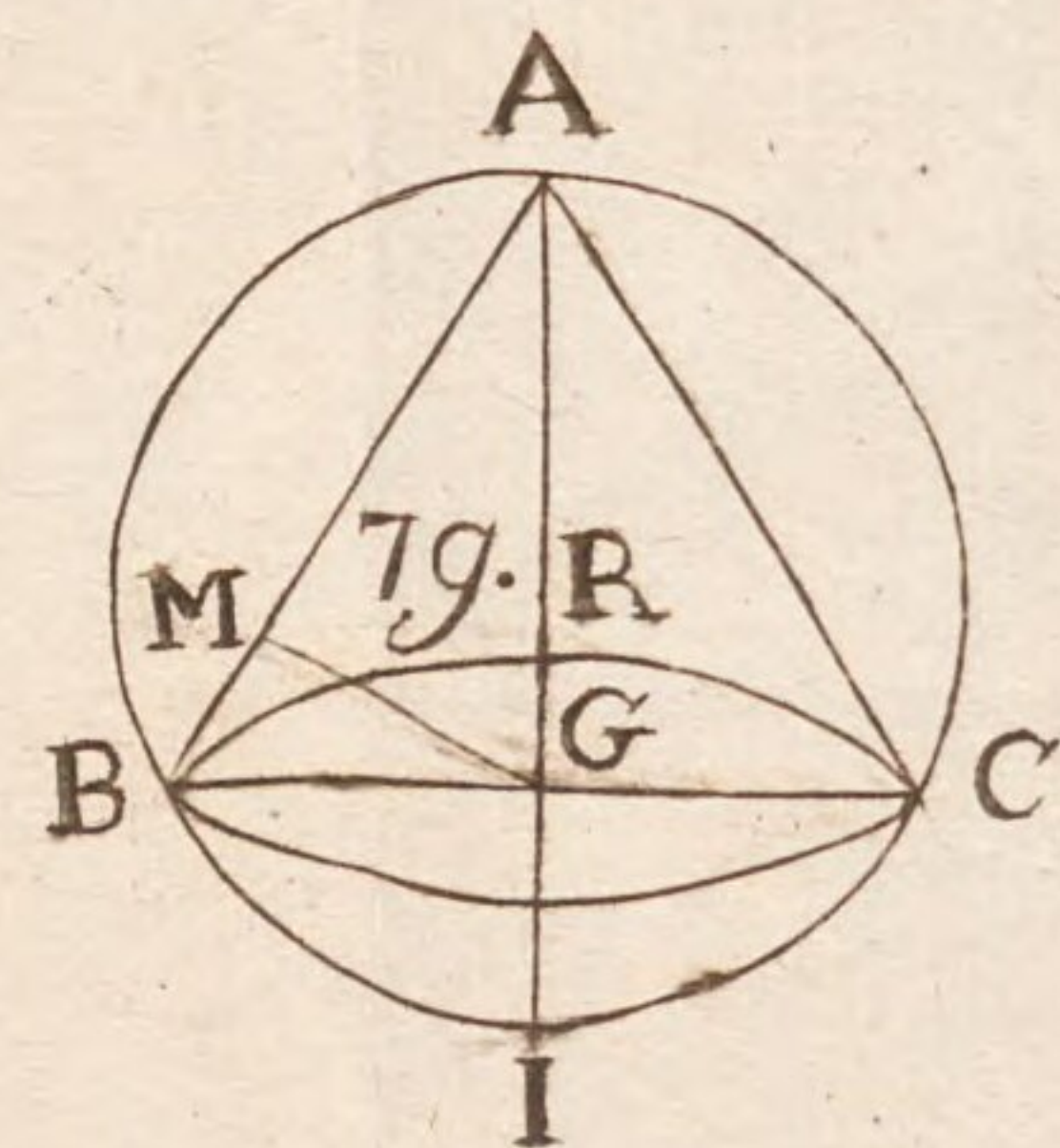
ШЕ
И

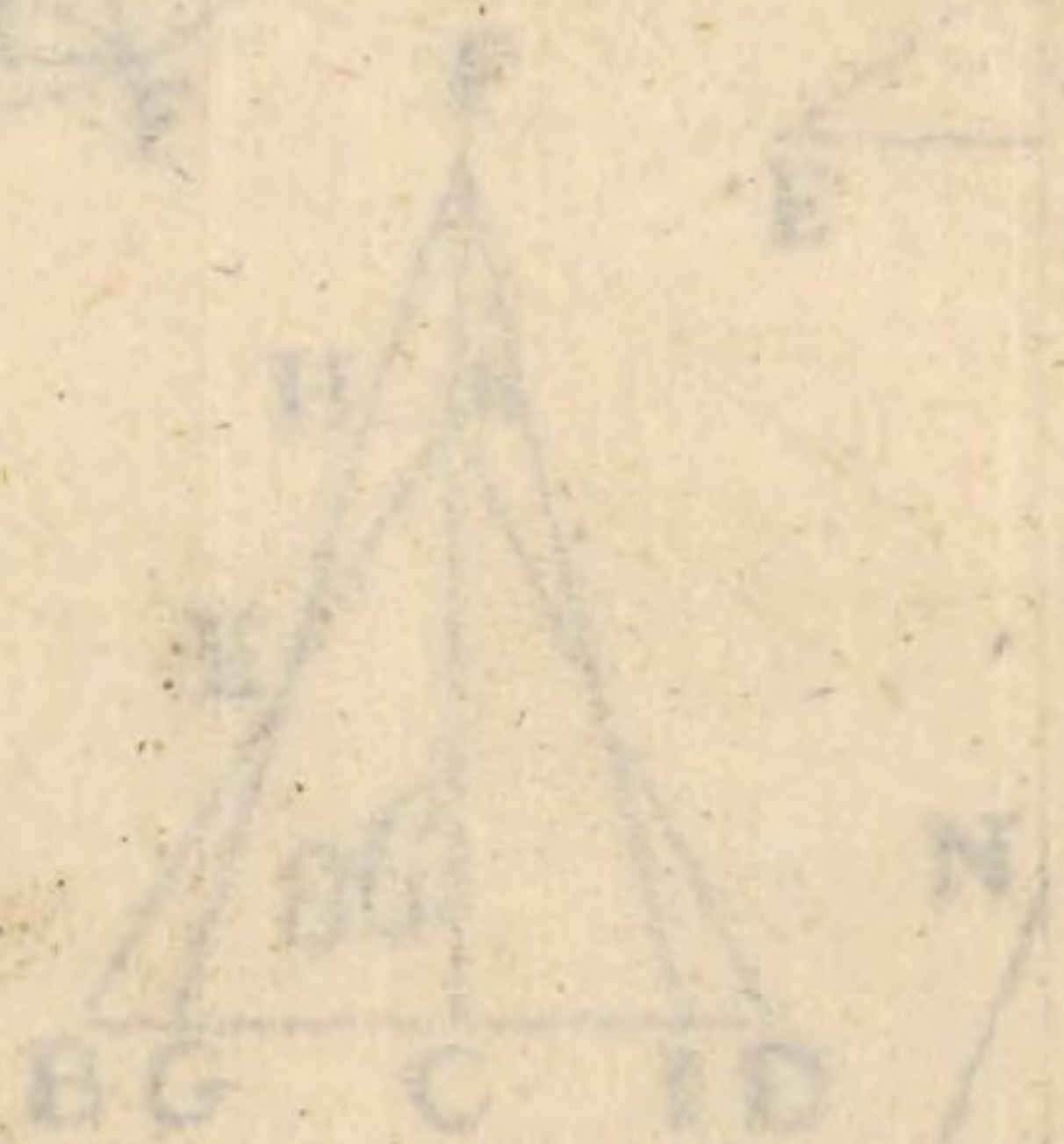
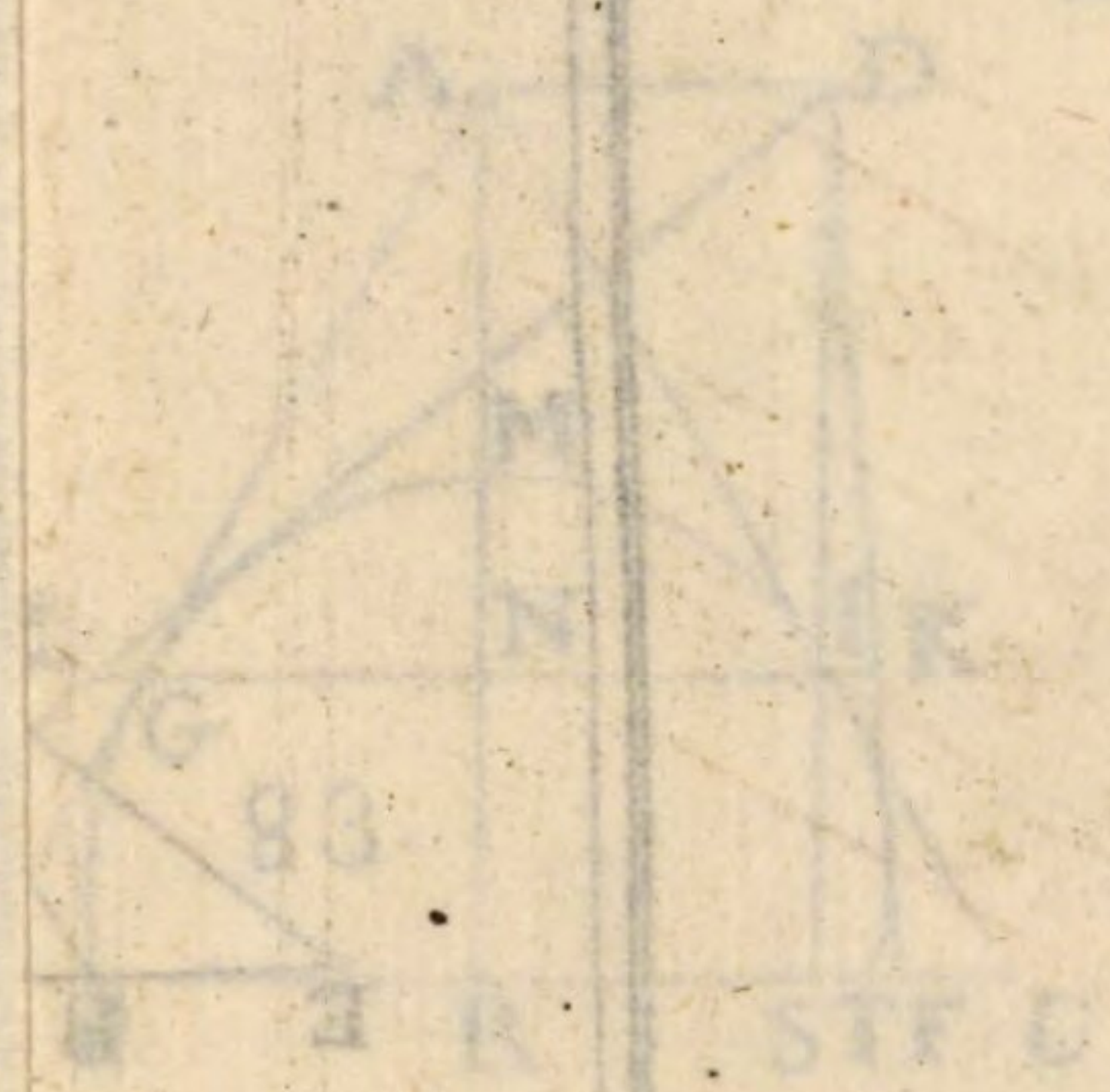


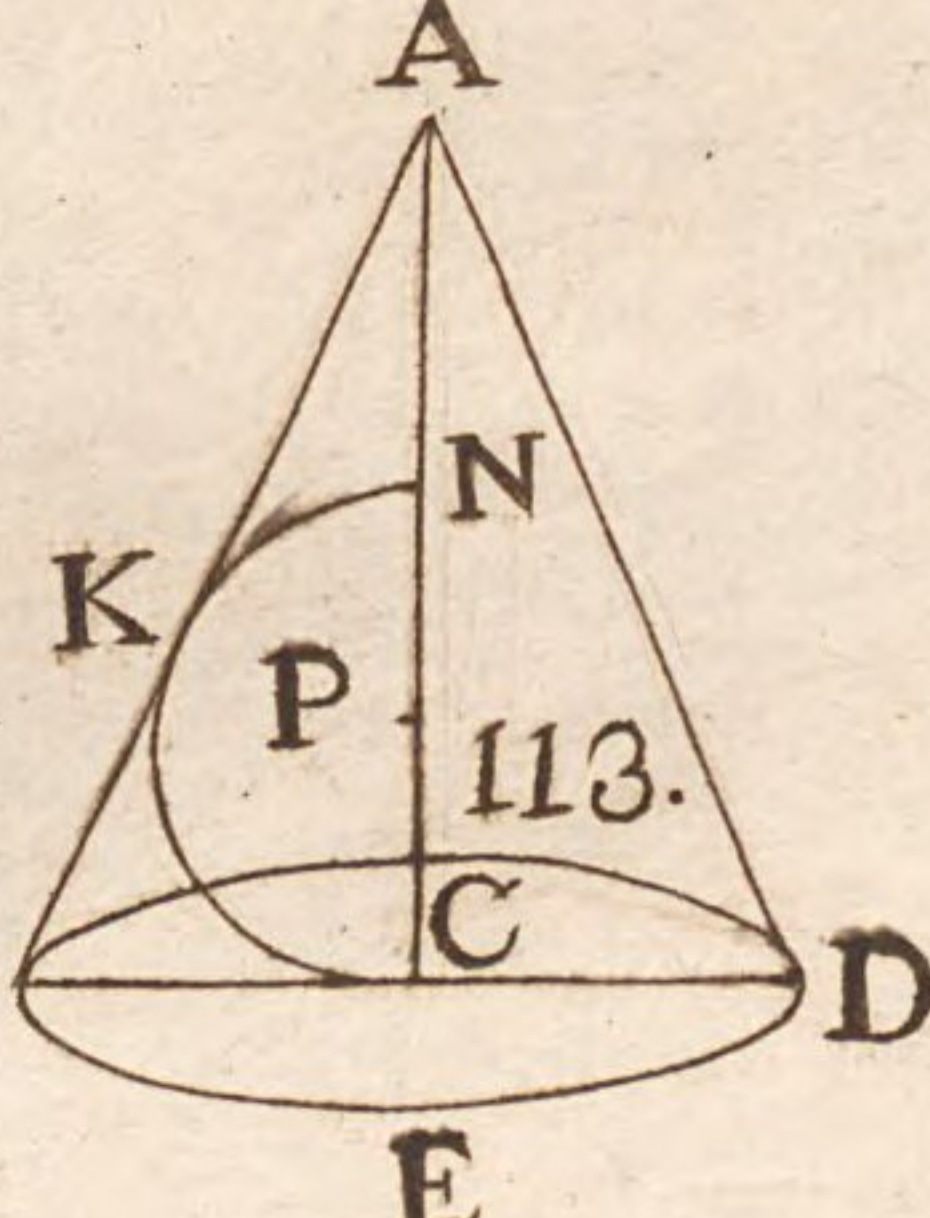
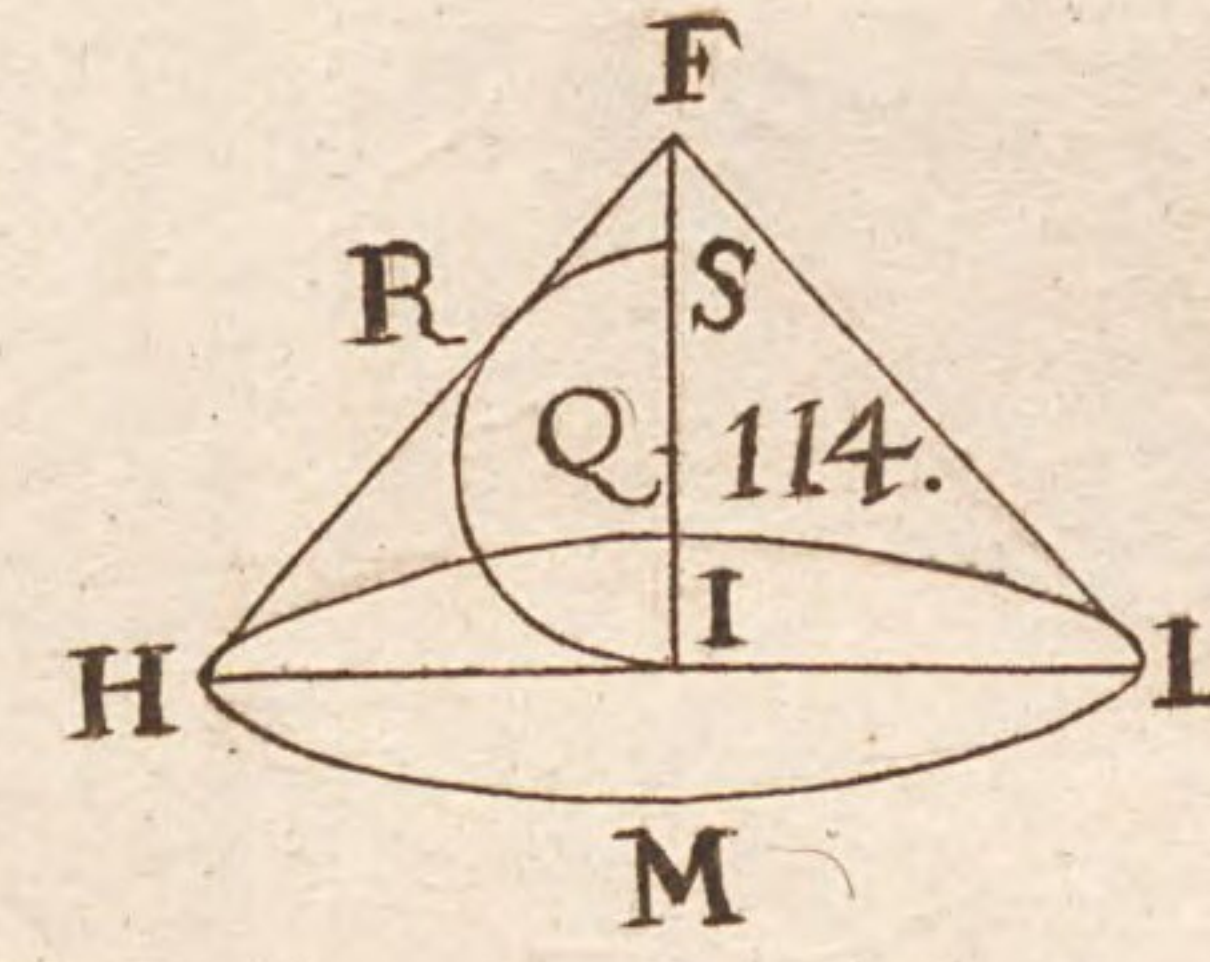
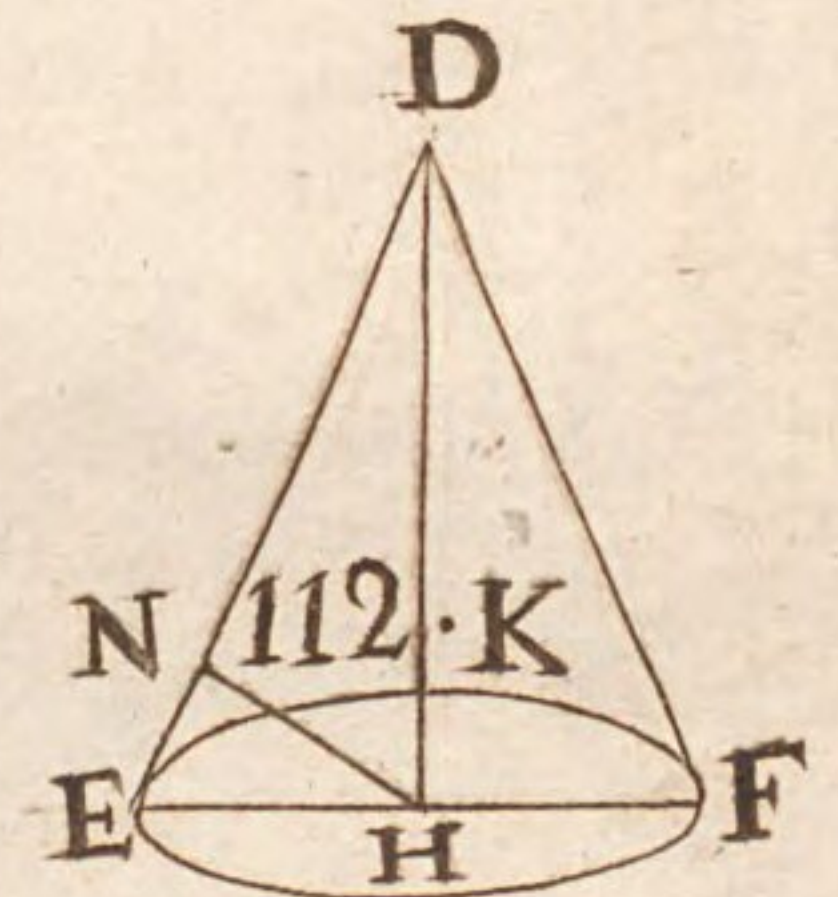
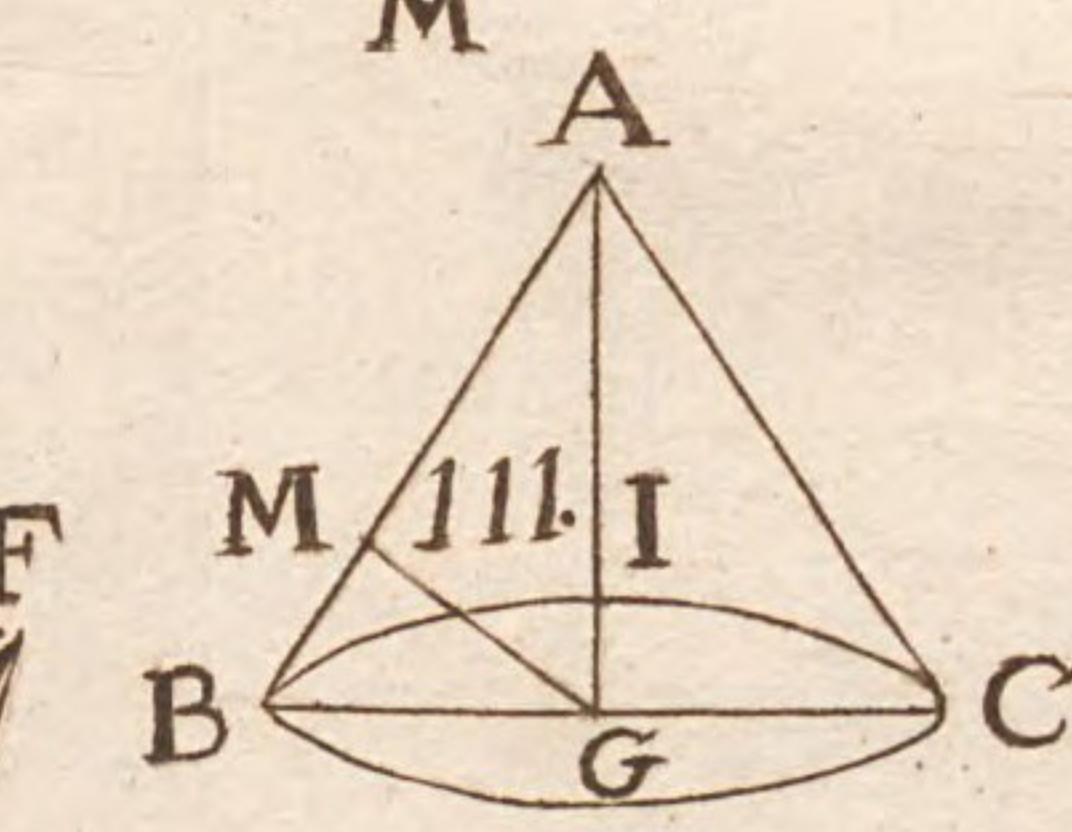
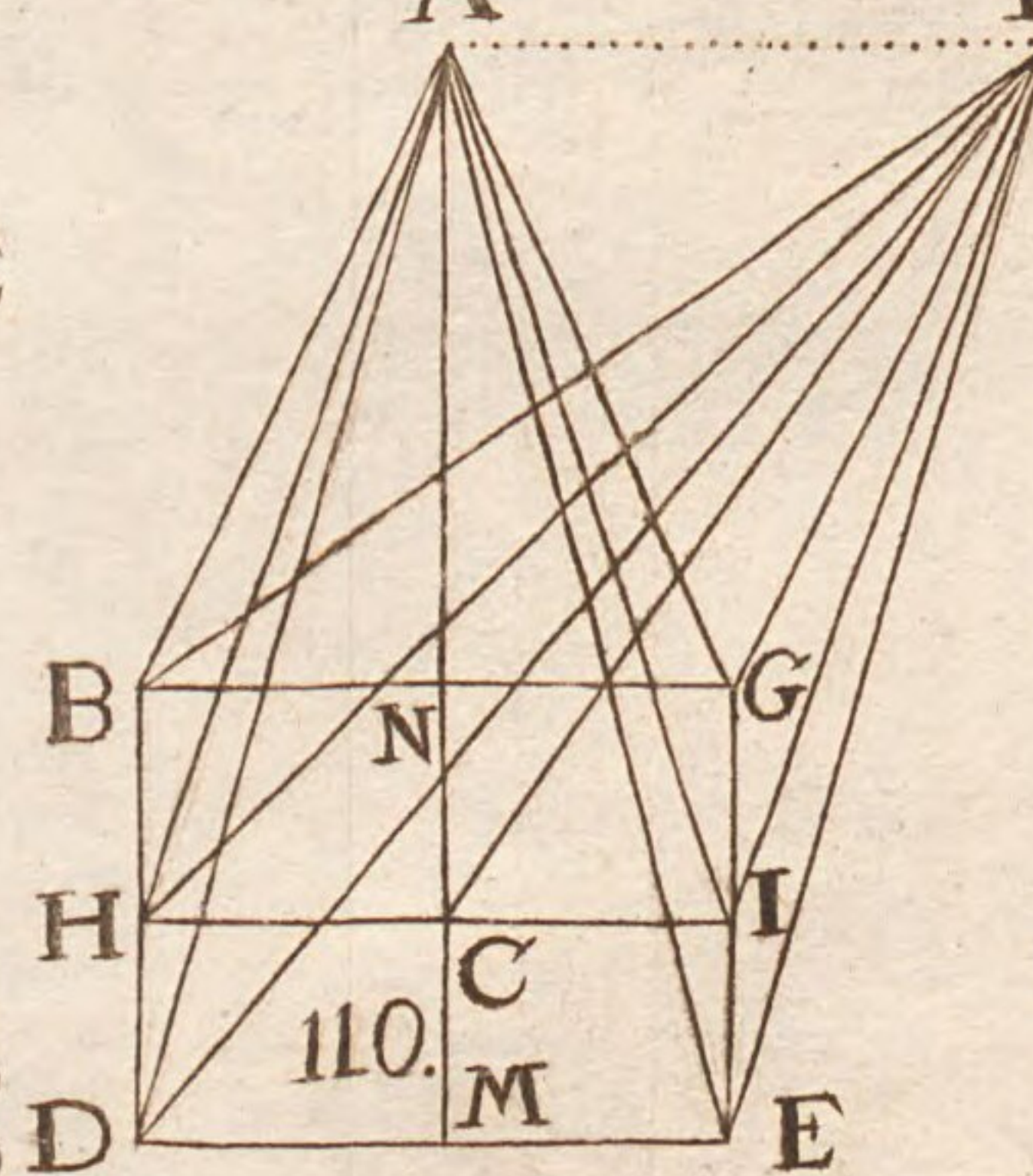
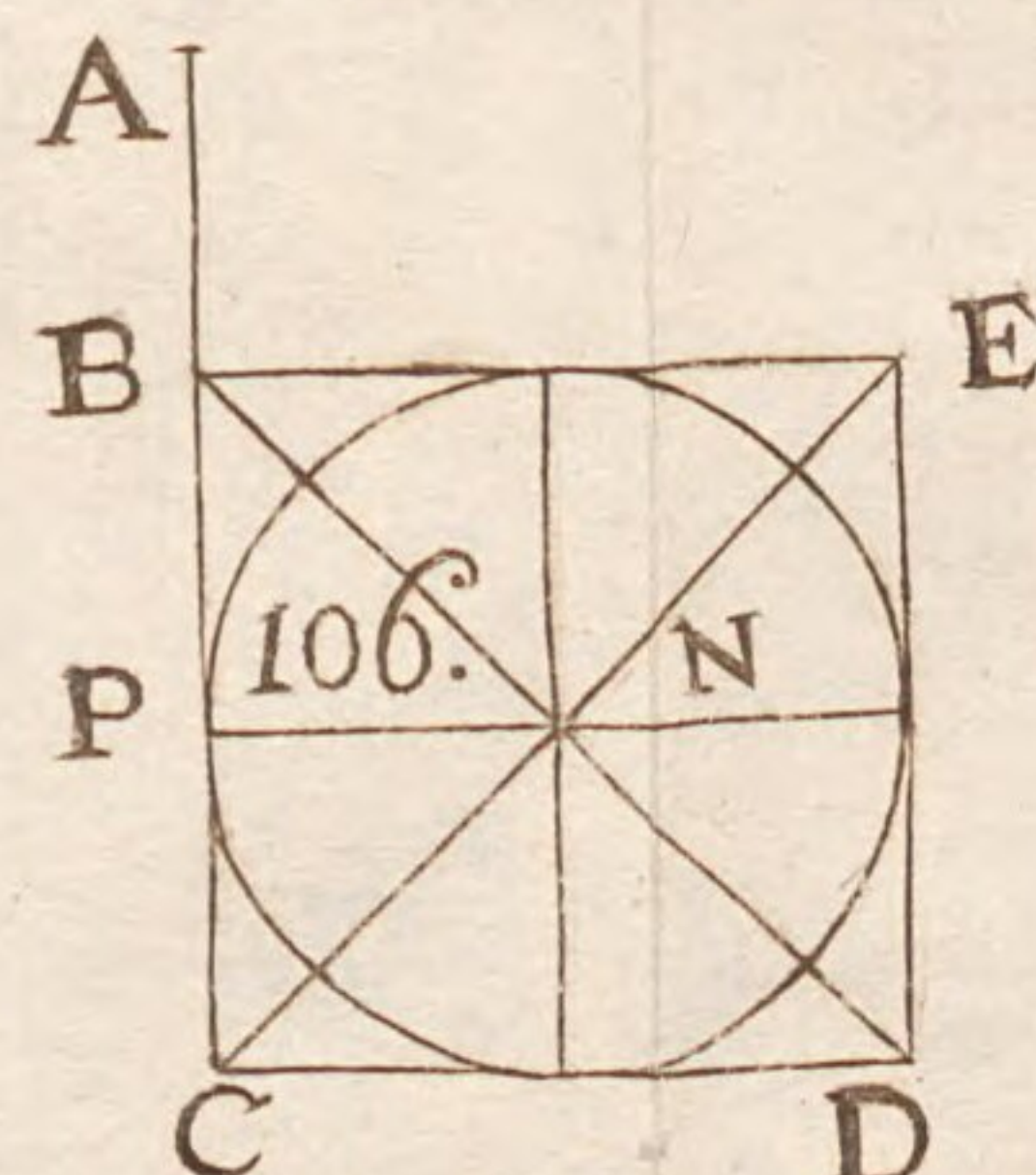
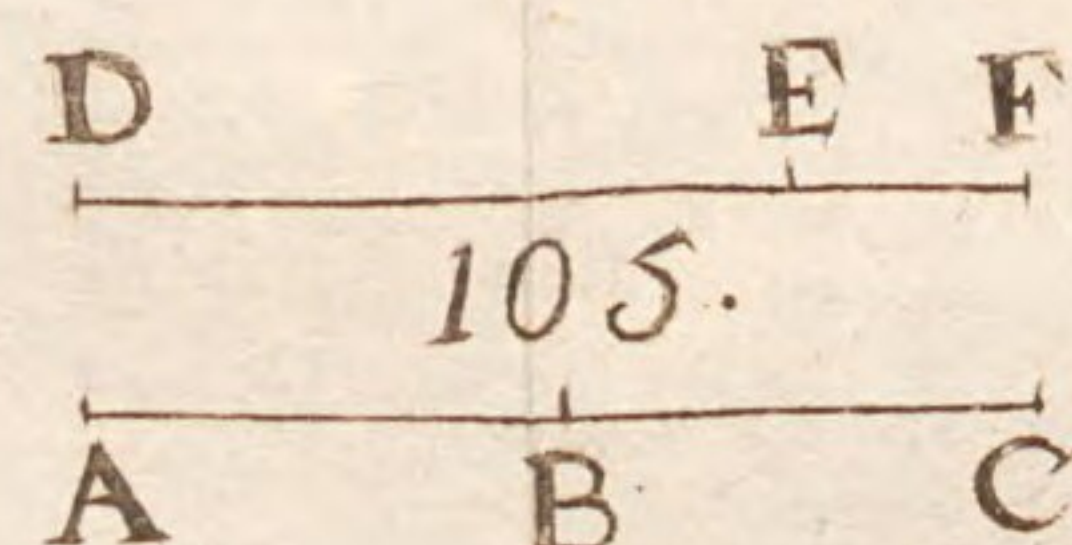
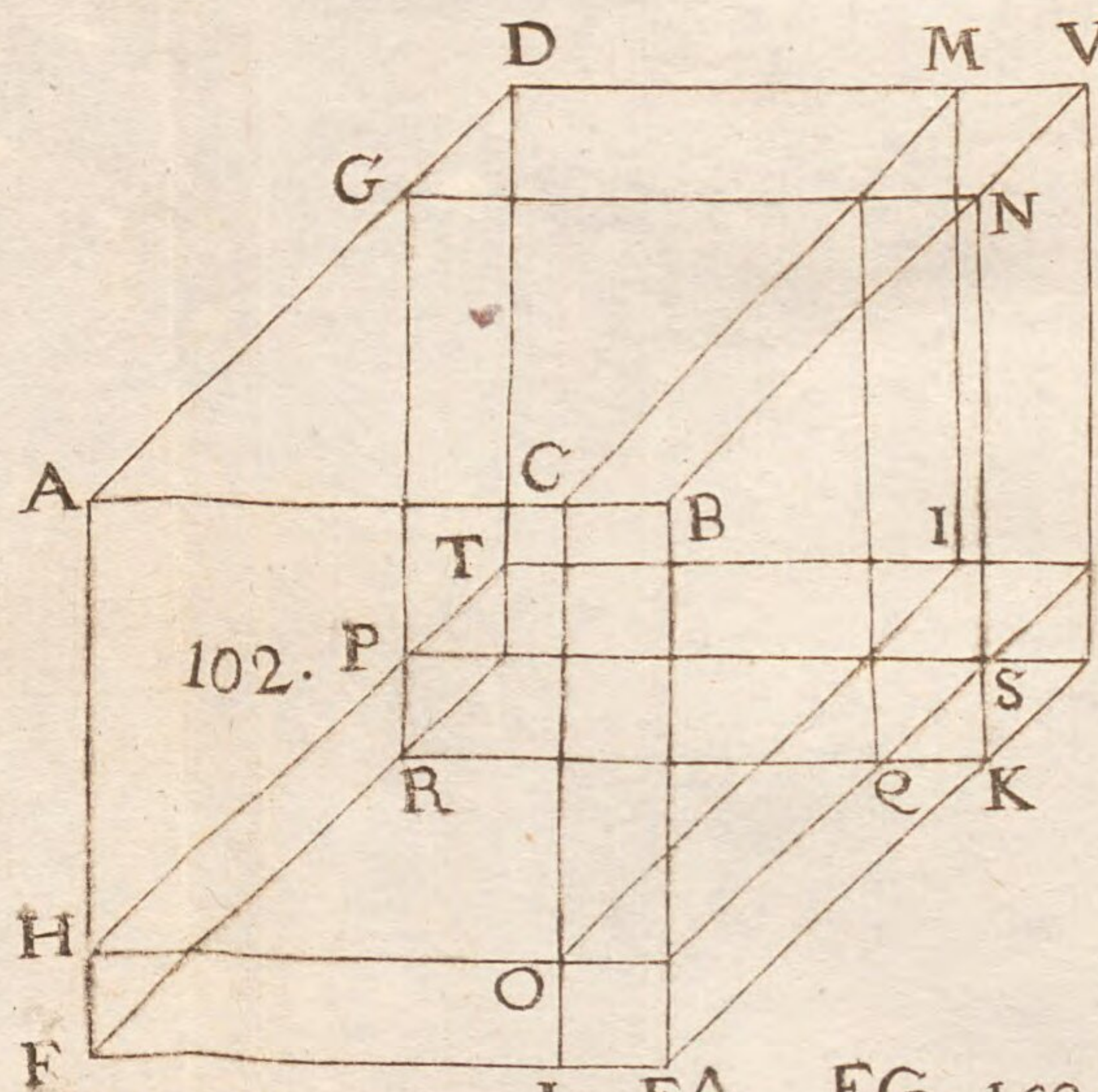
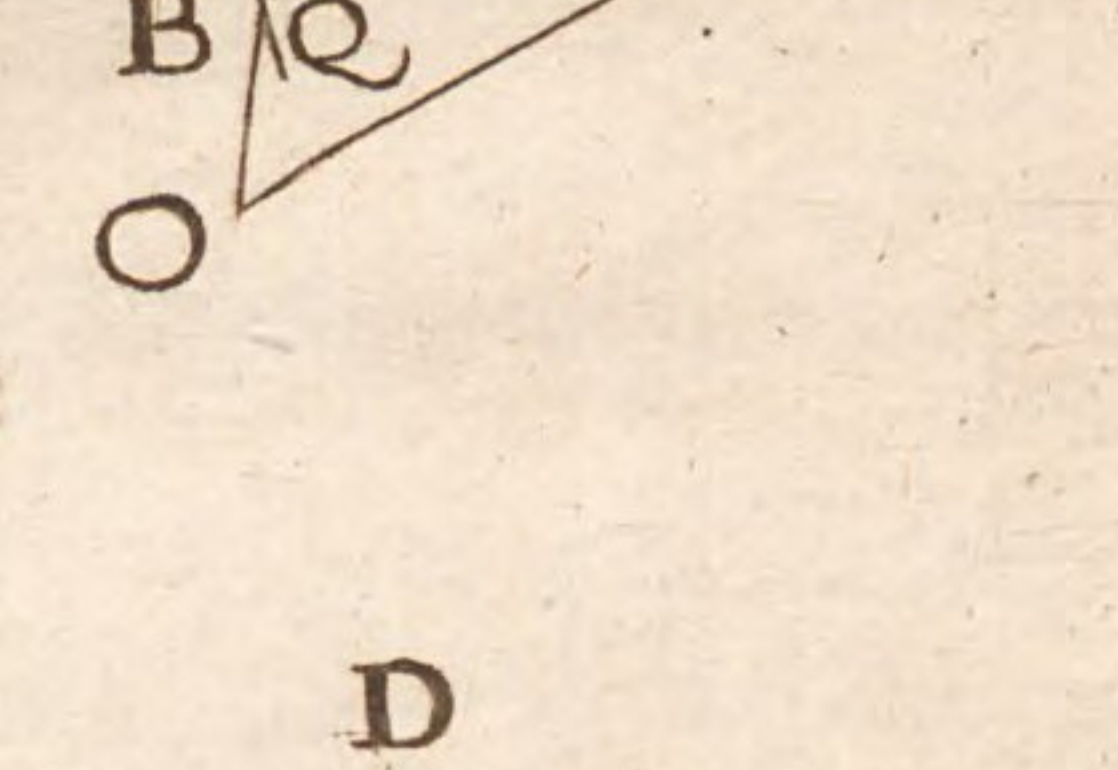
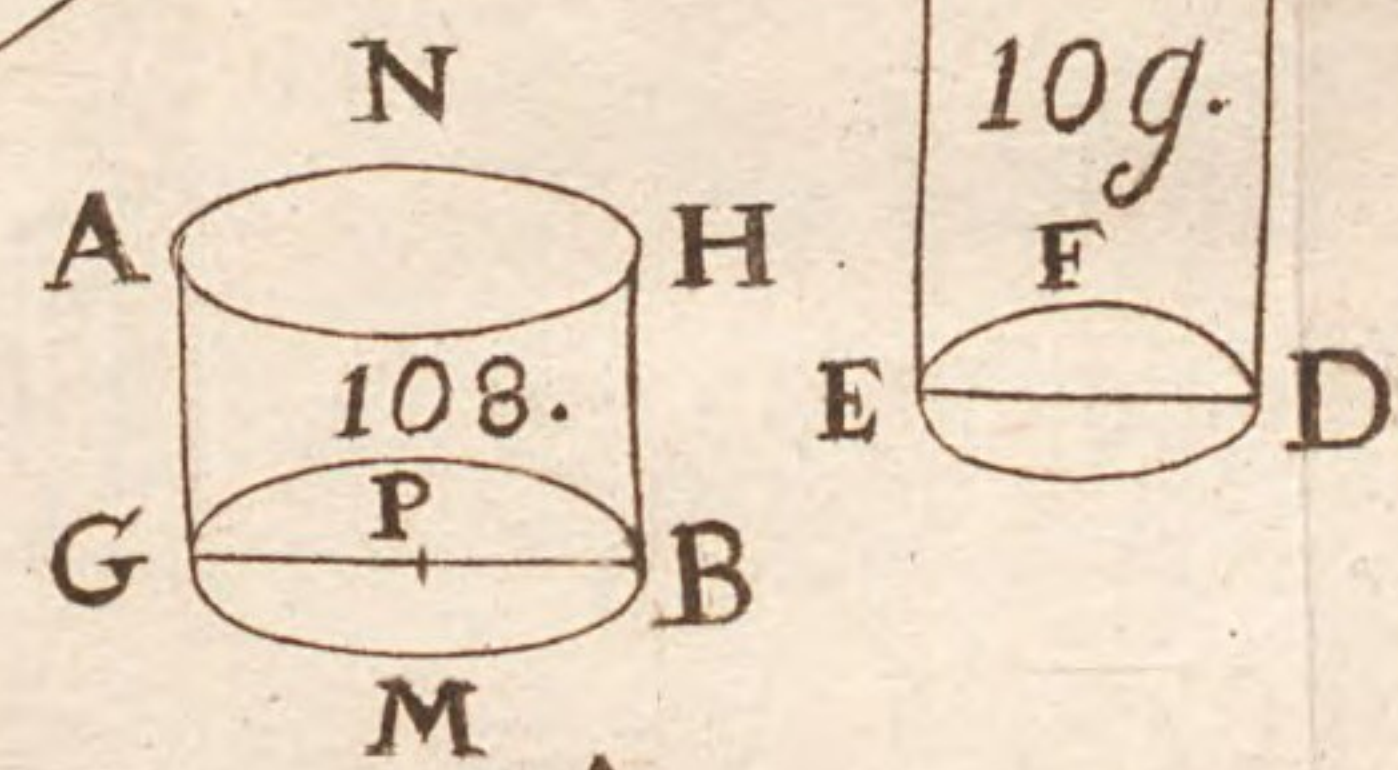
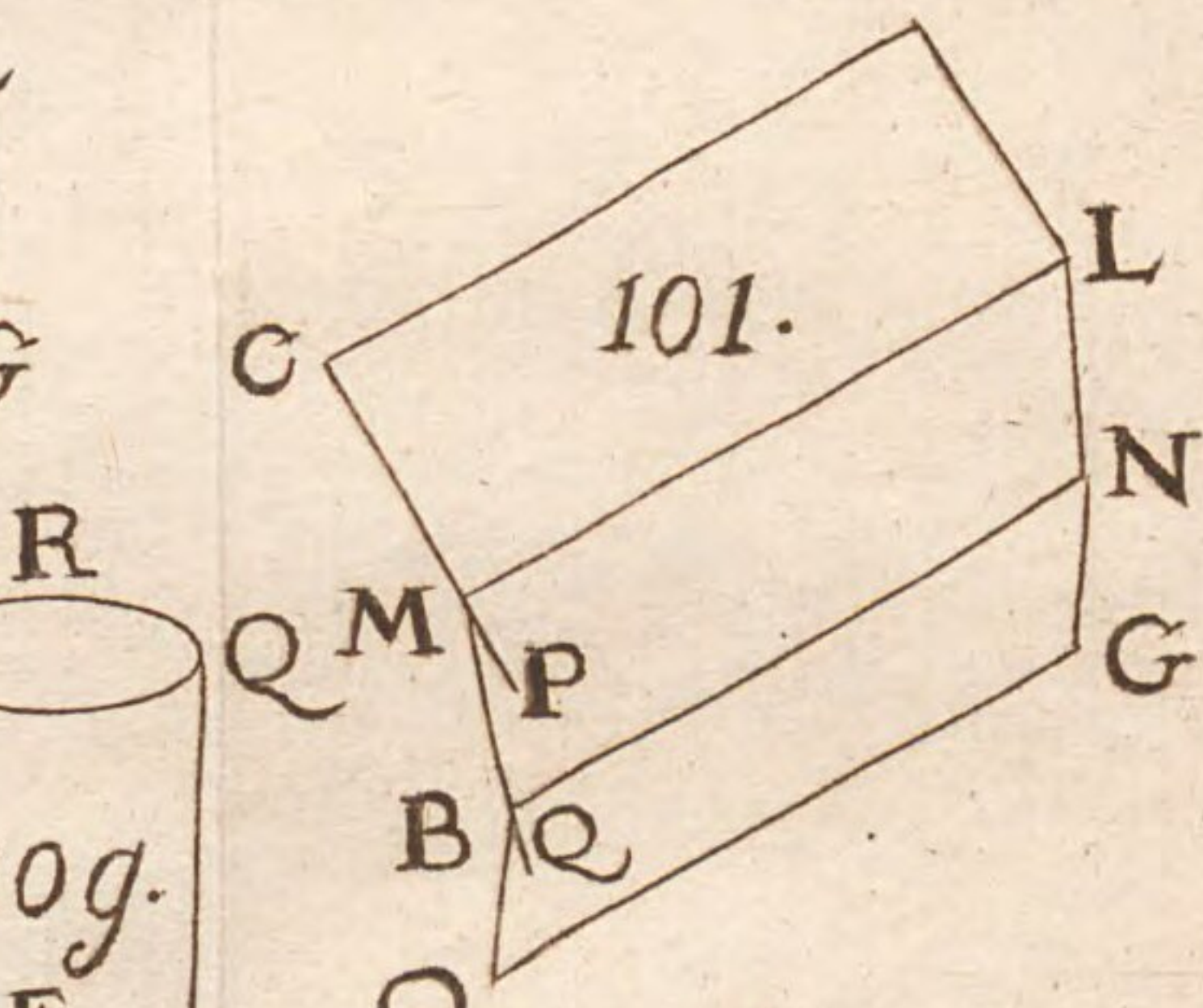
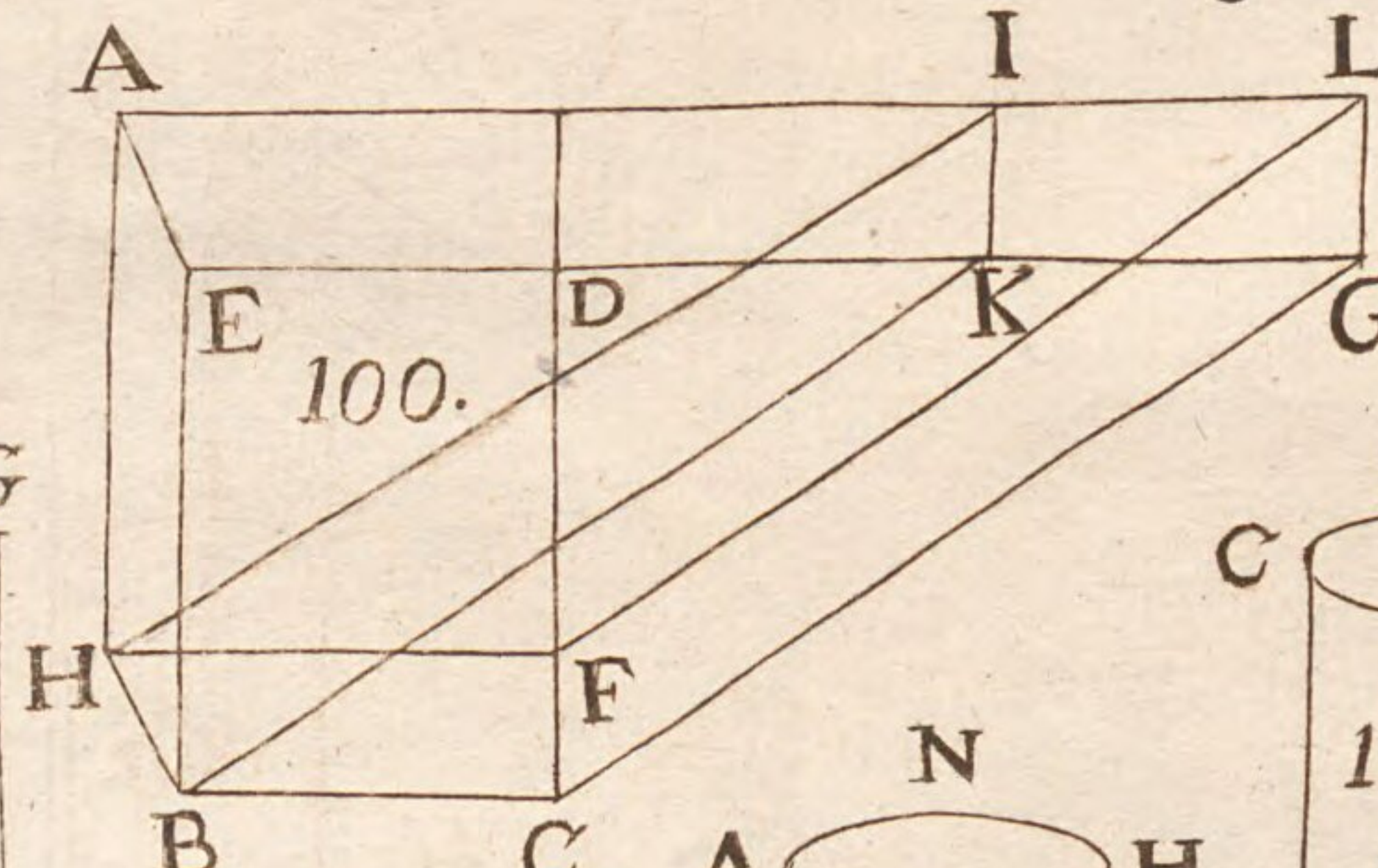
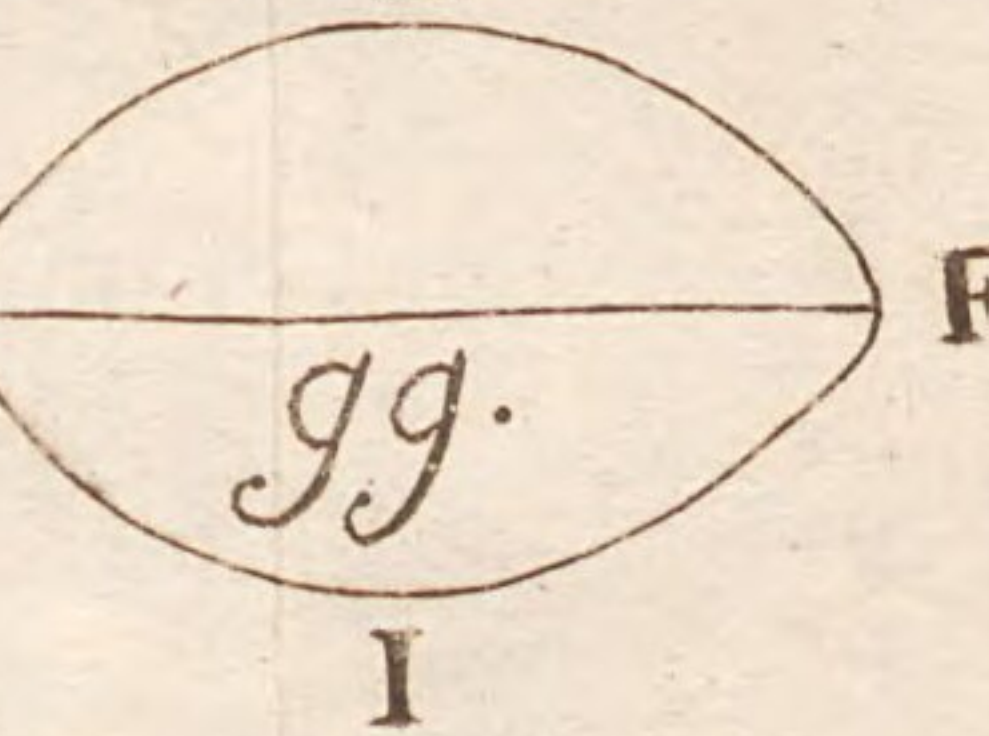
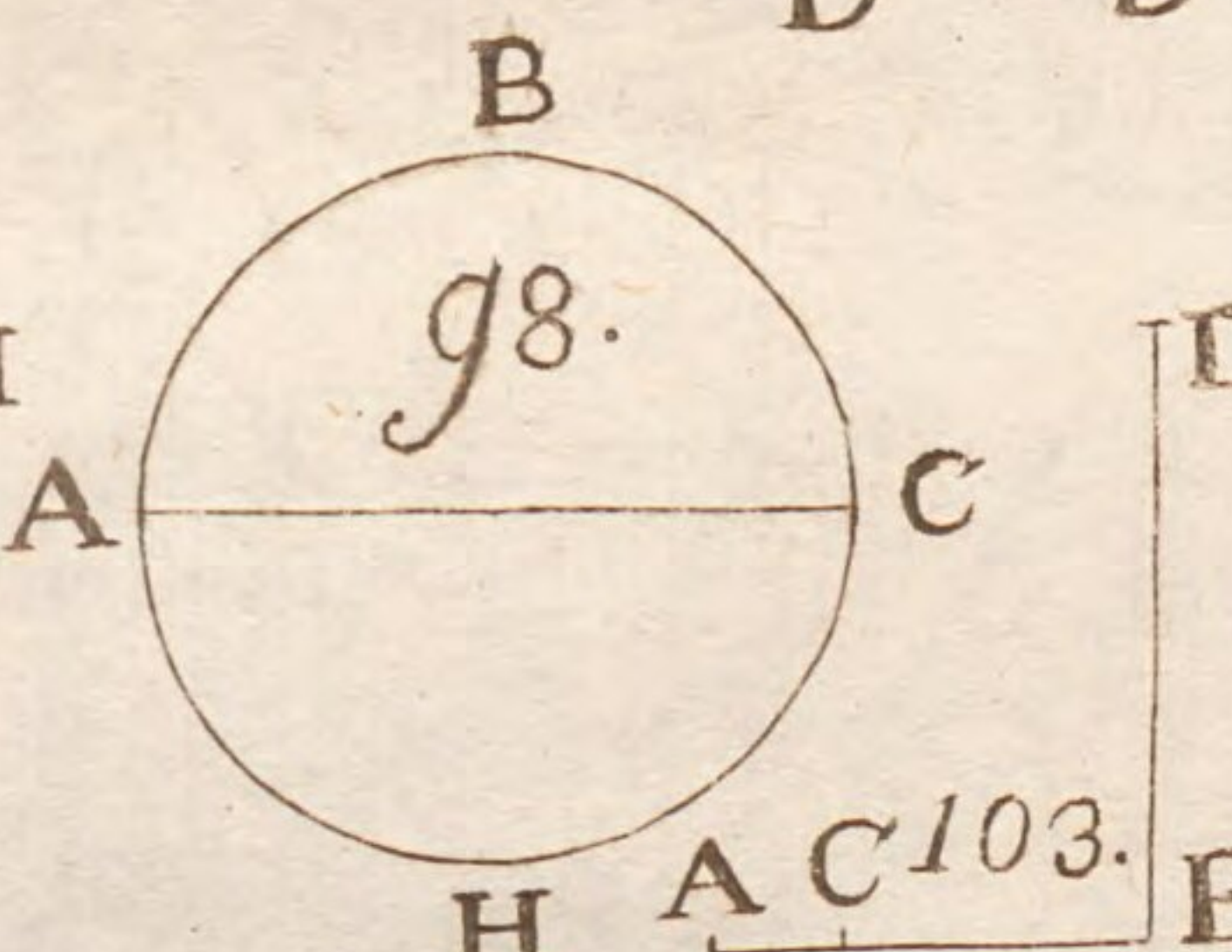
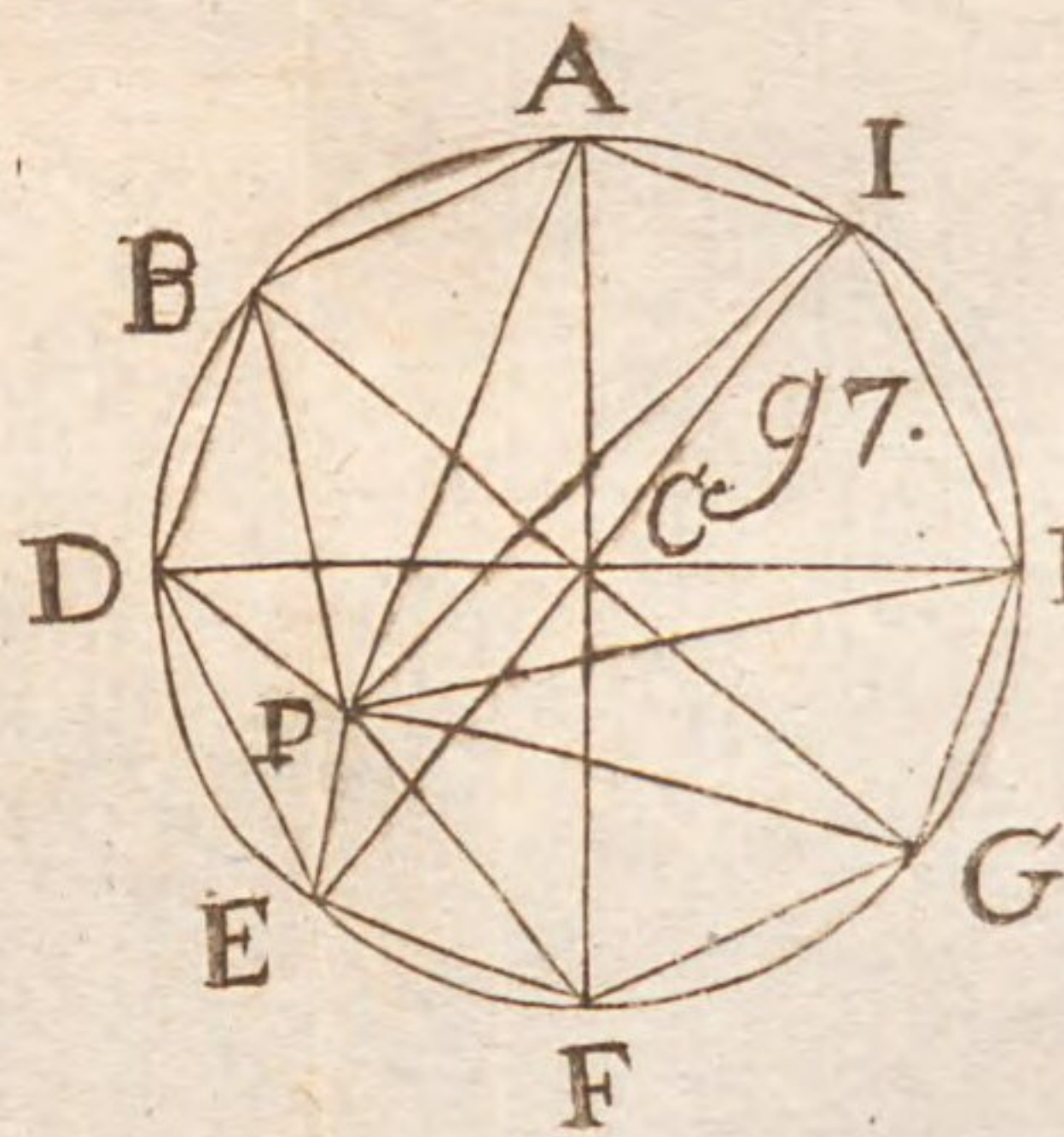
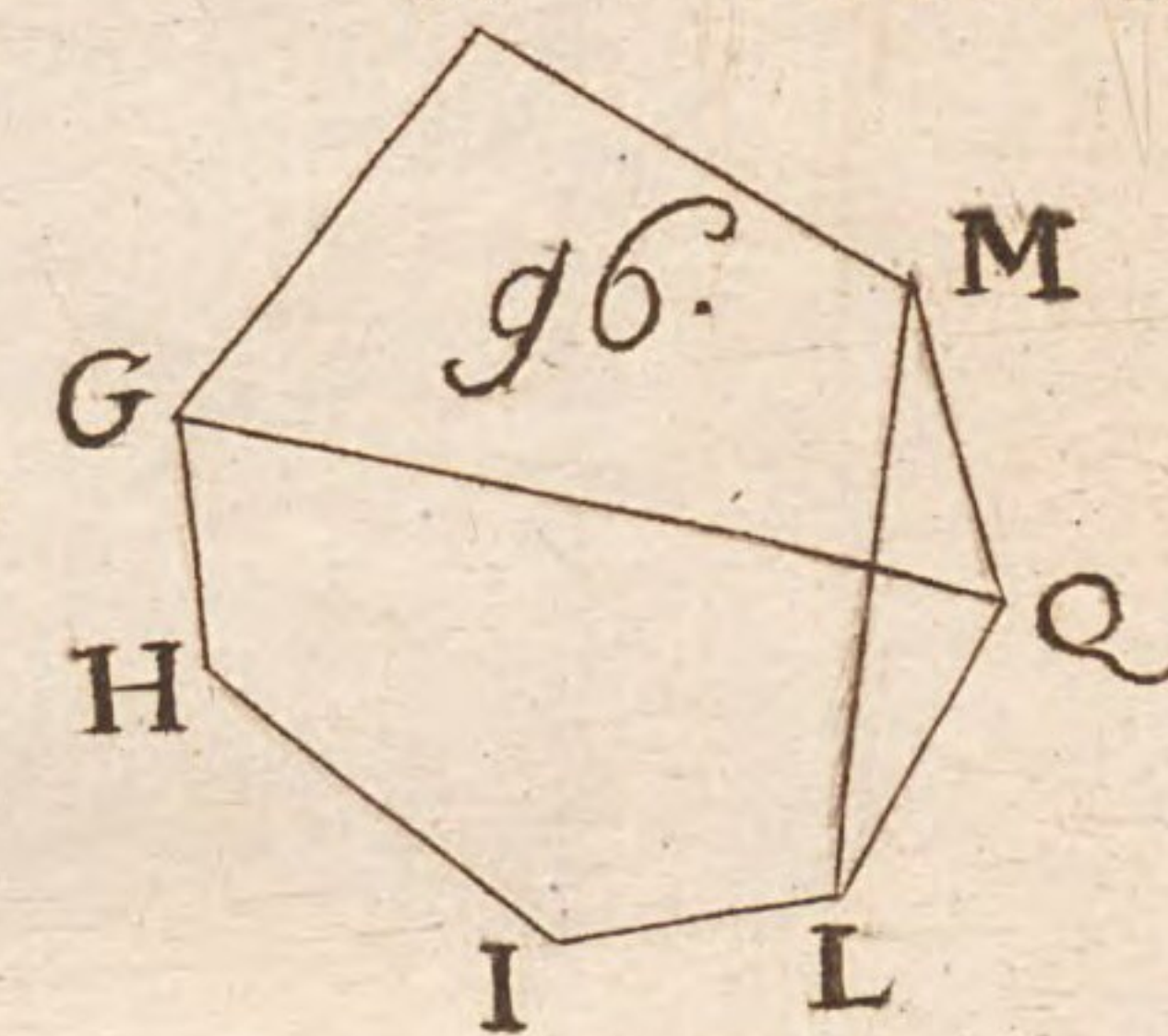
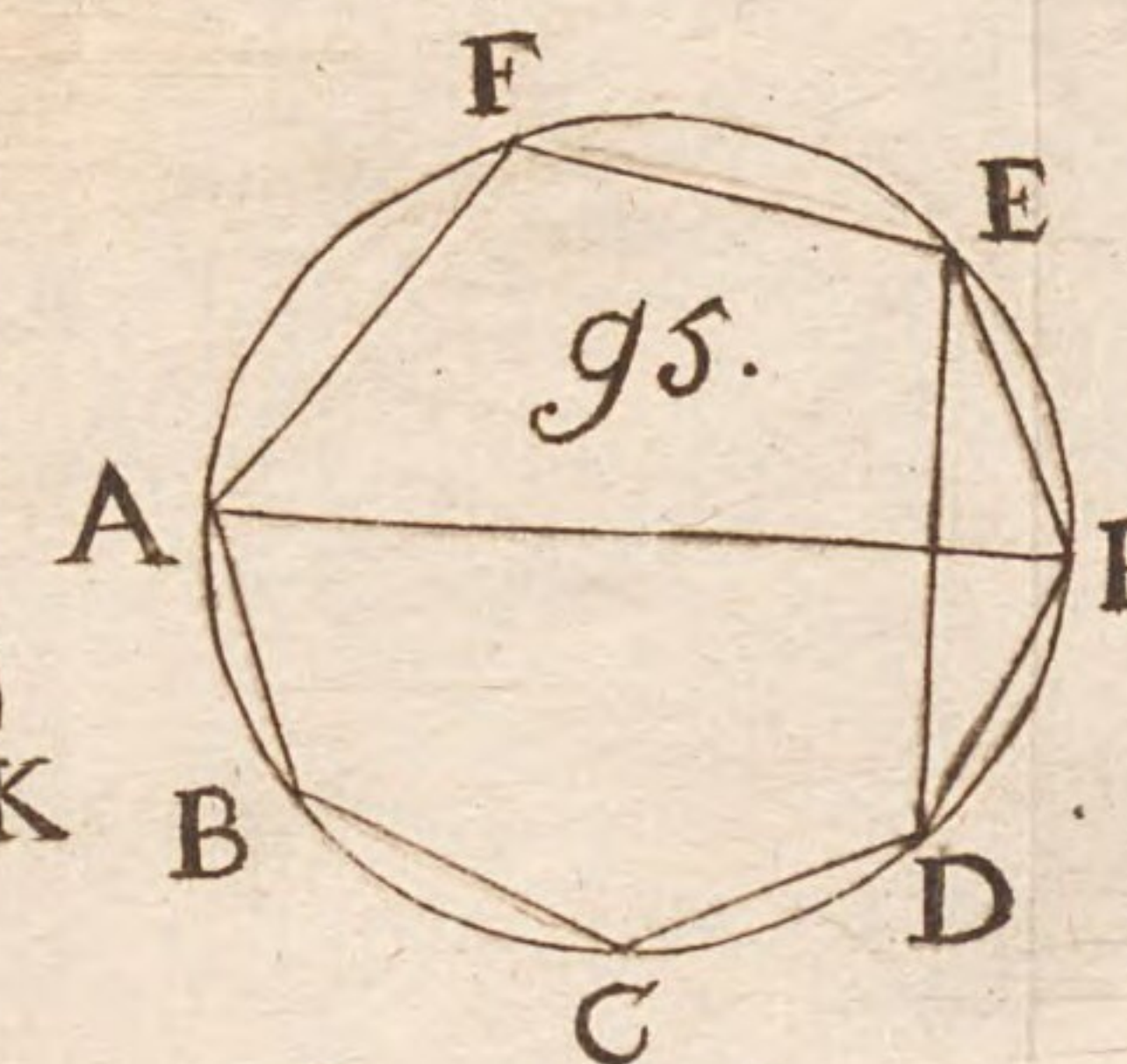
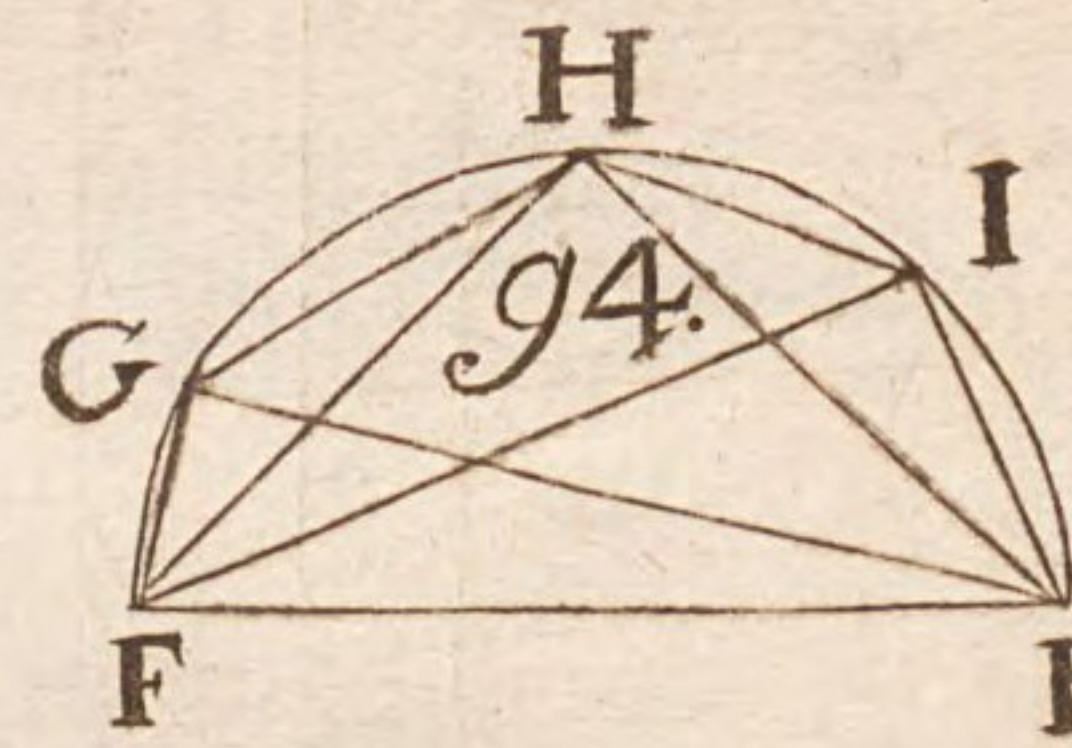
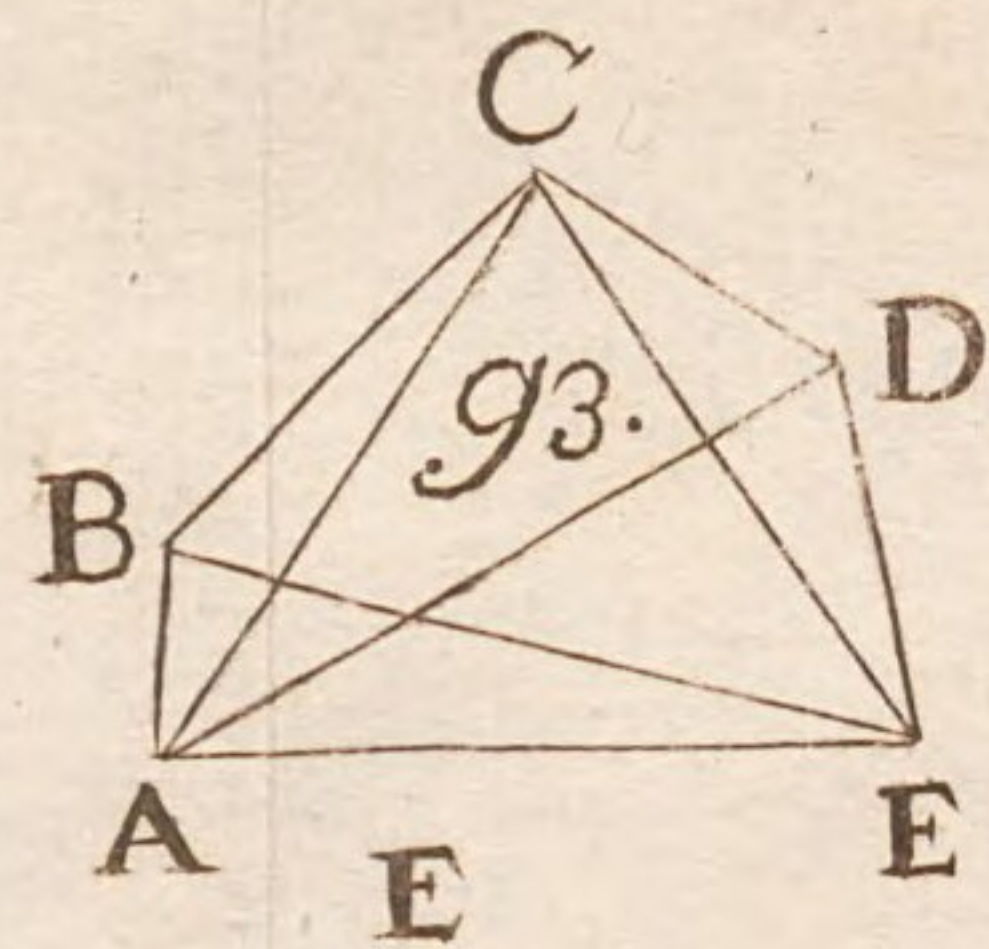
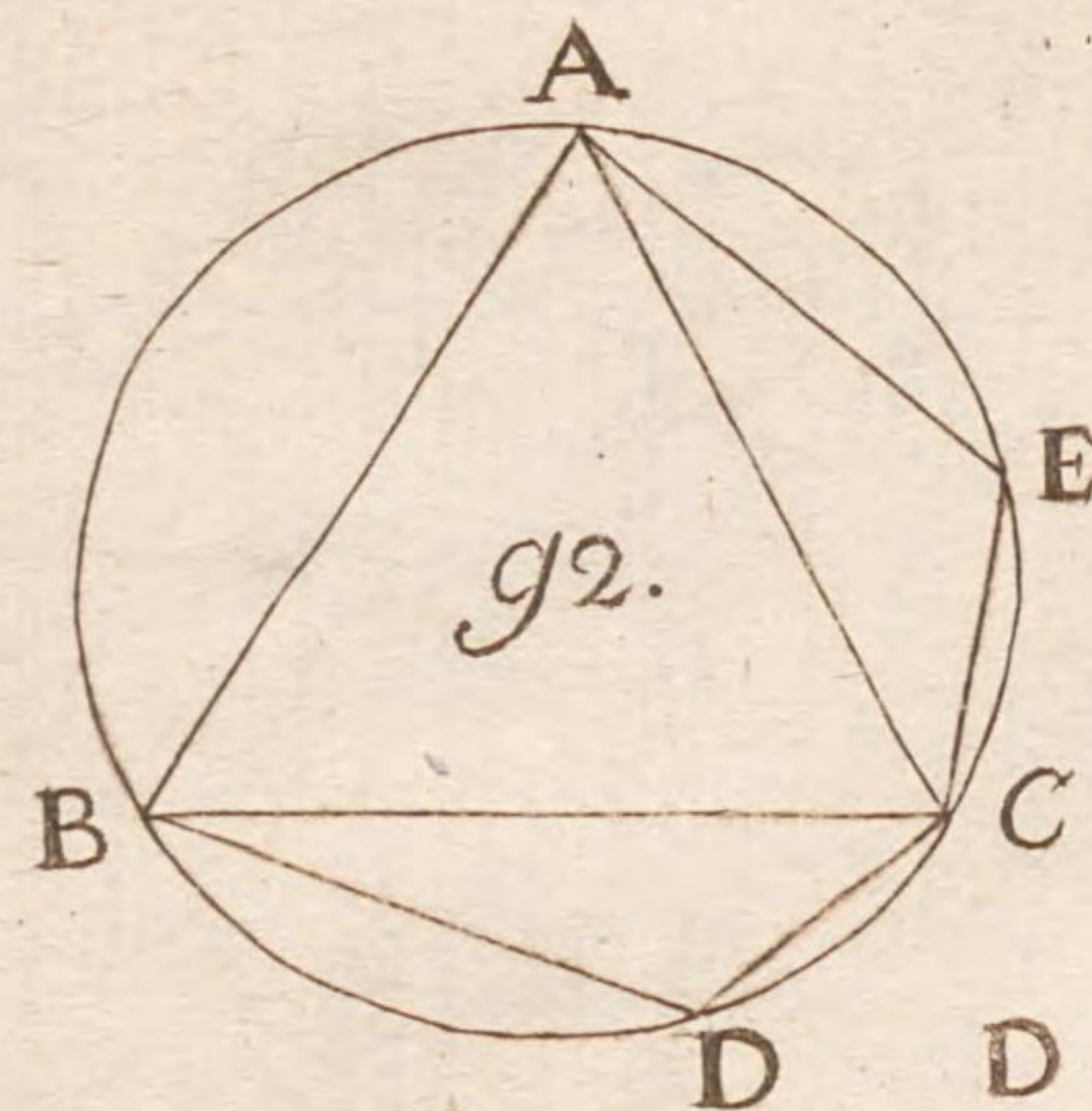
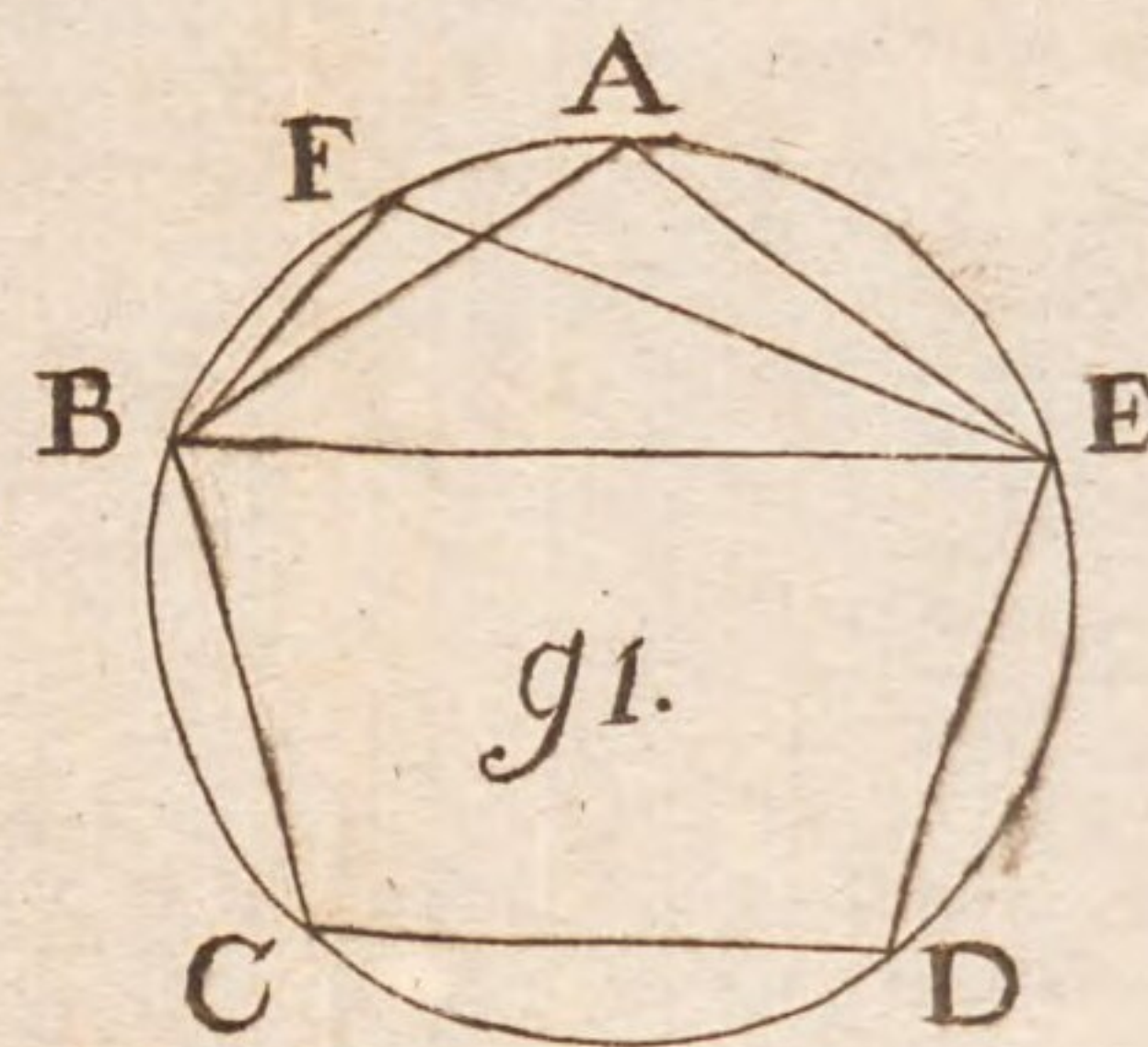
К



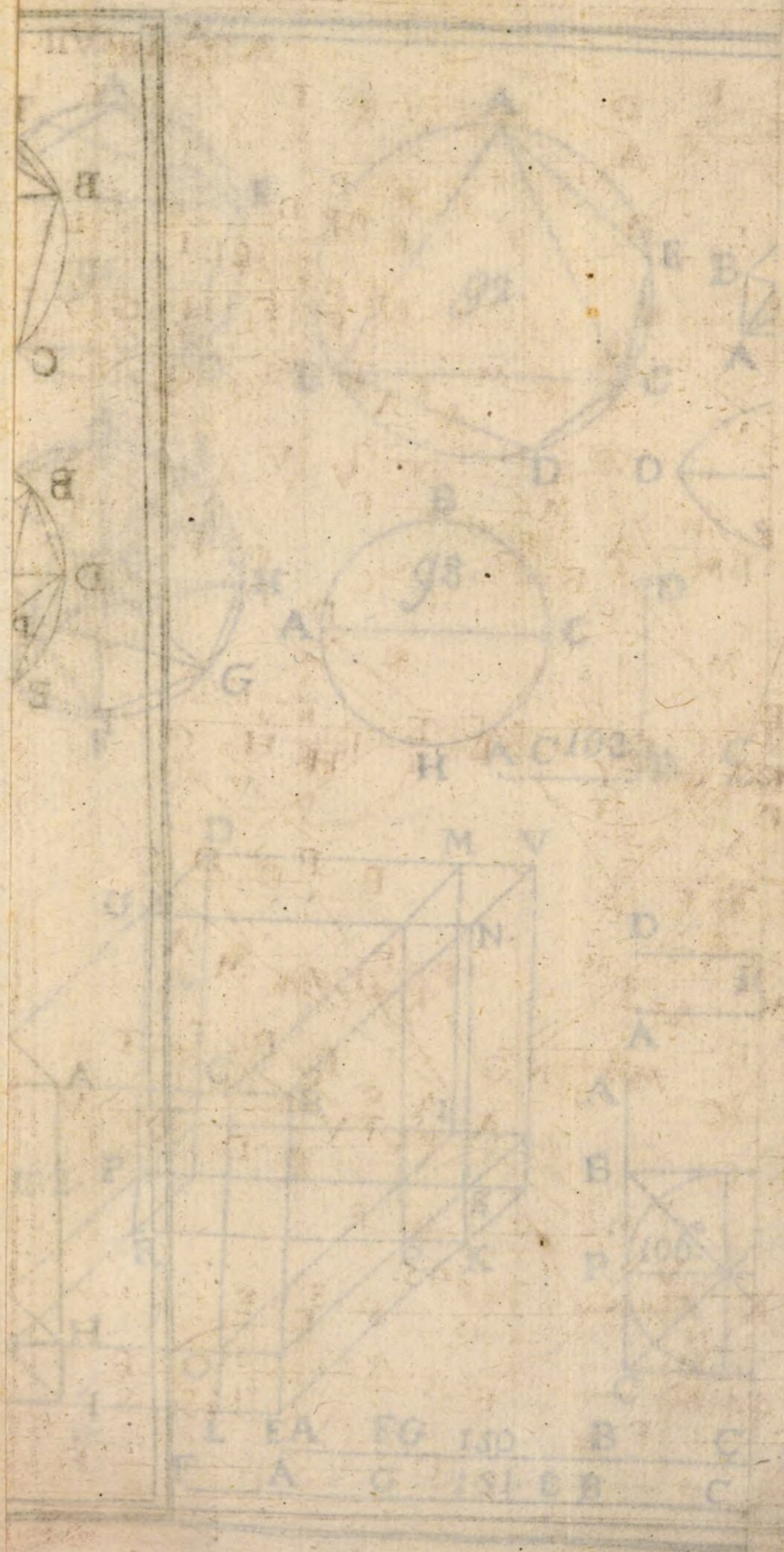


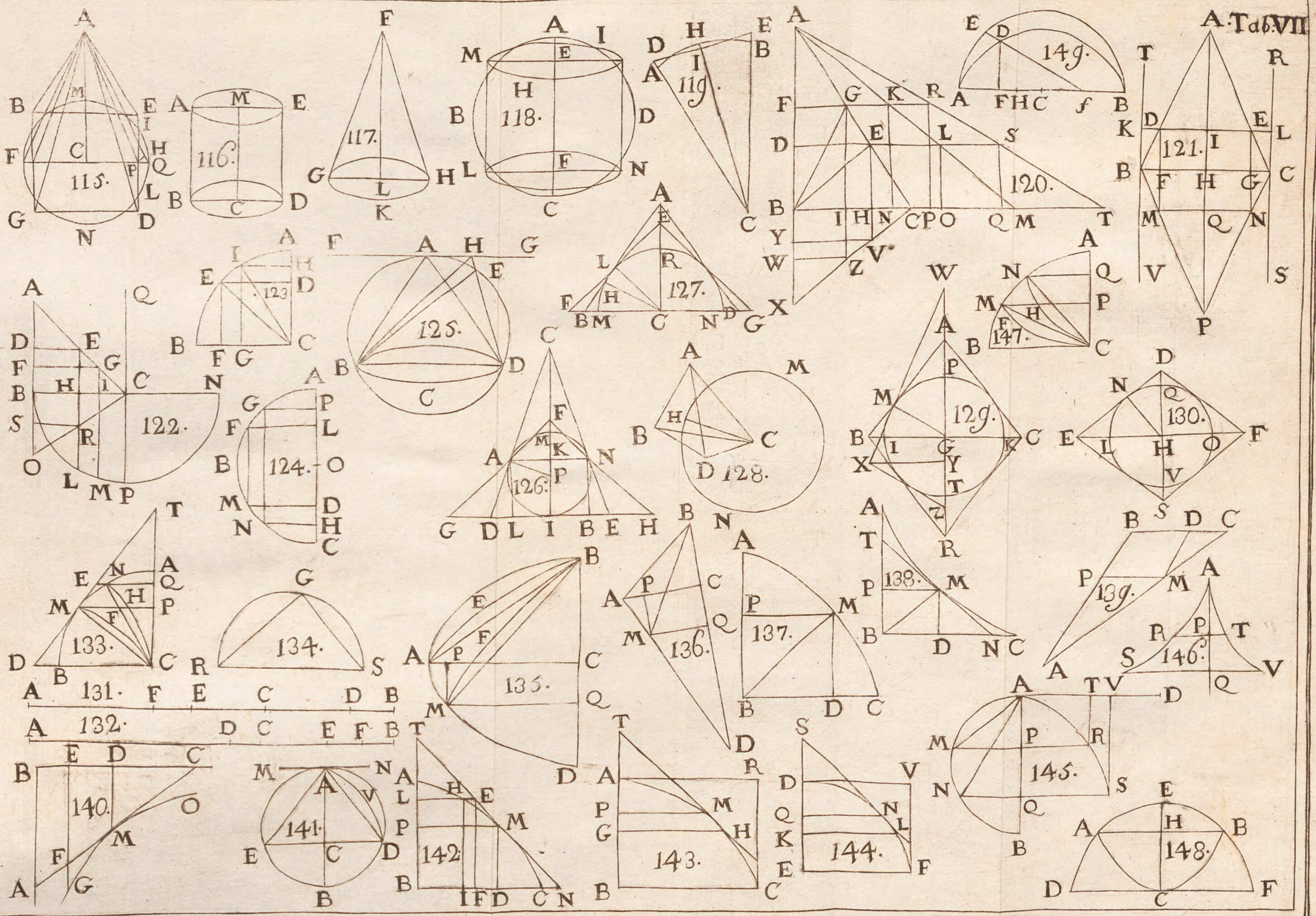




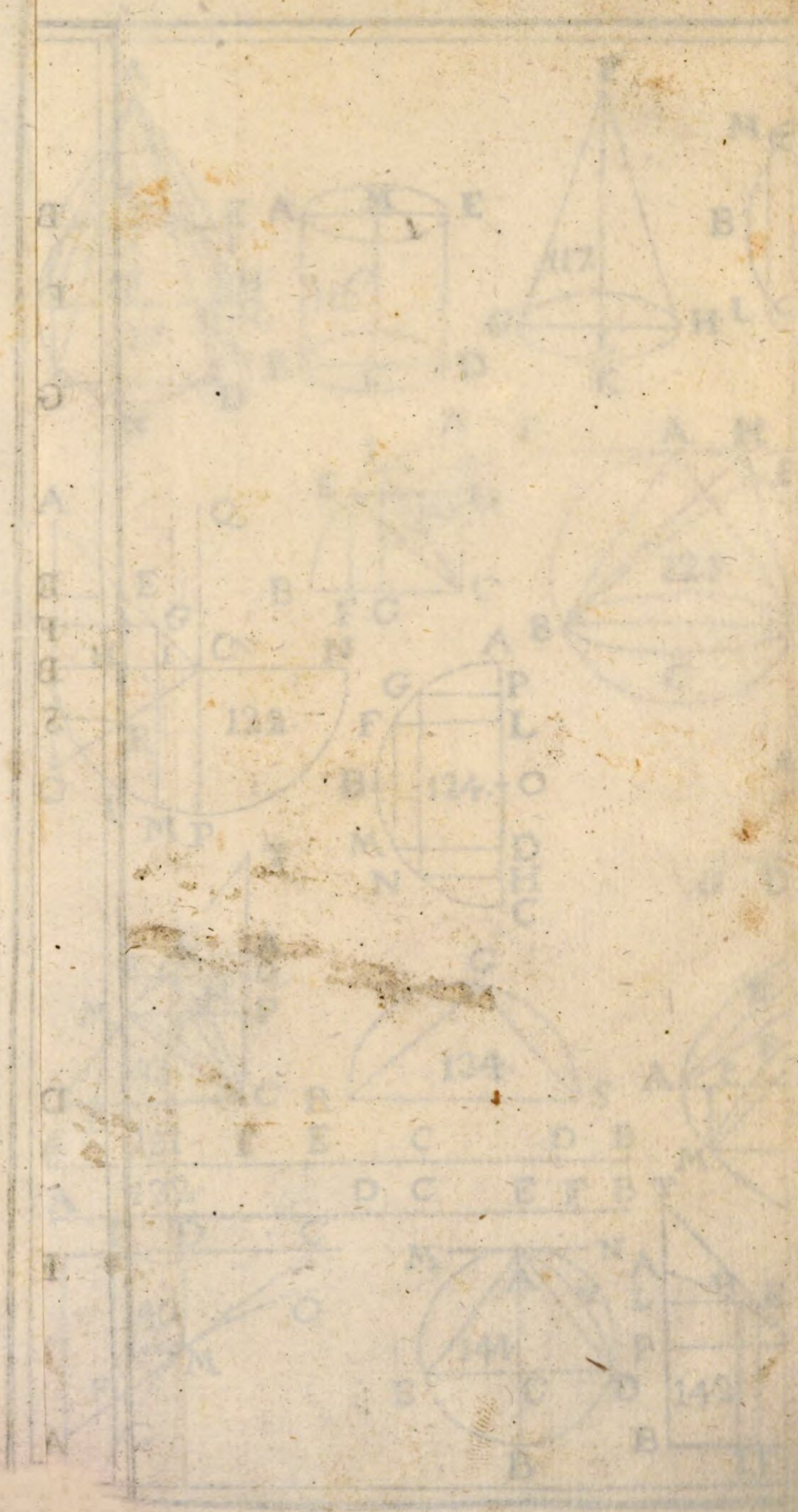


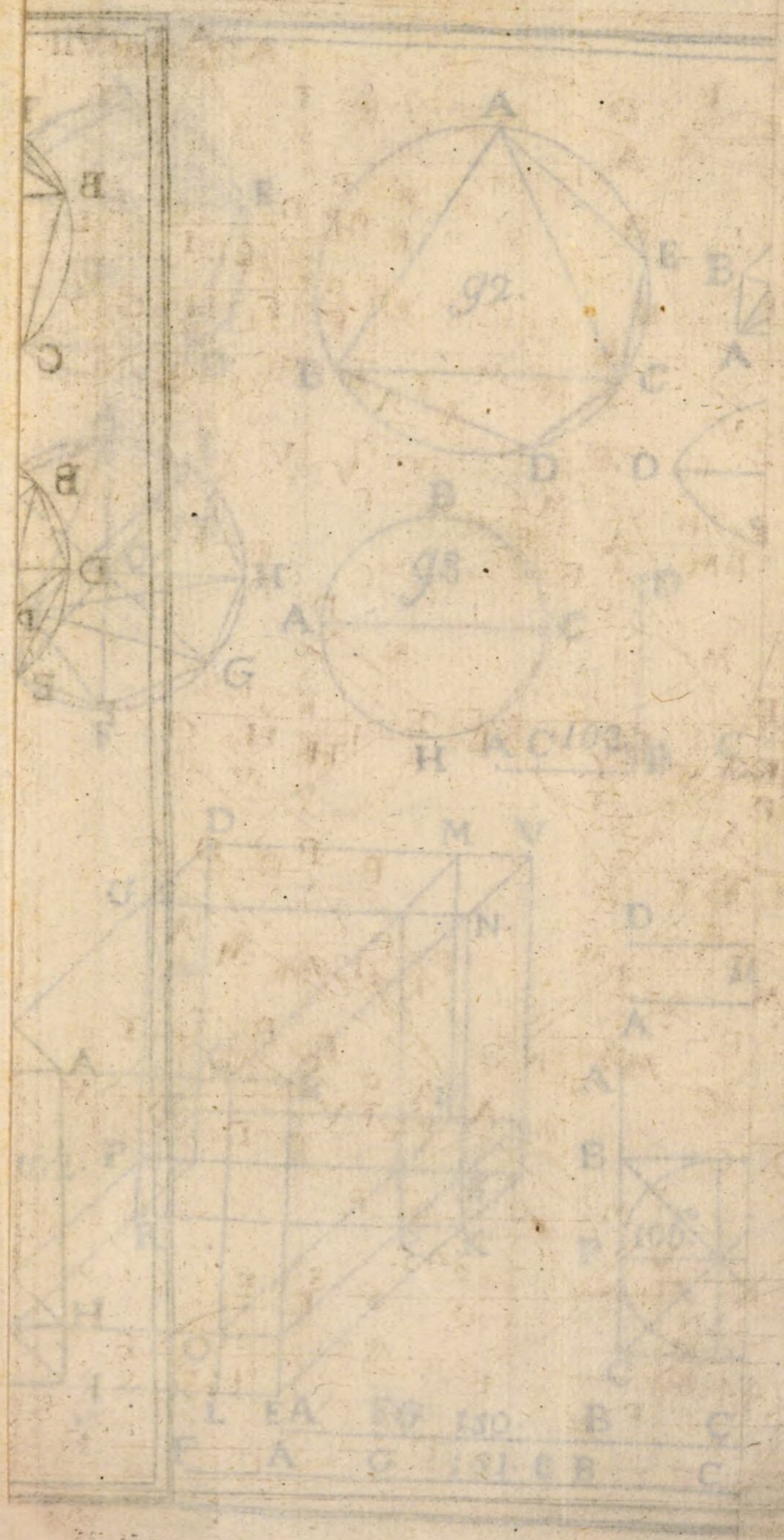
150. B C E D
F A G 151. E B C D D

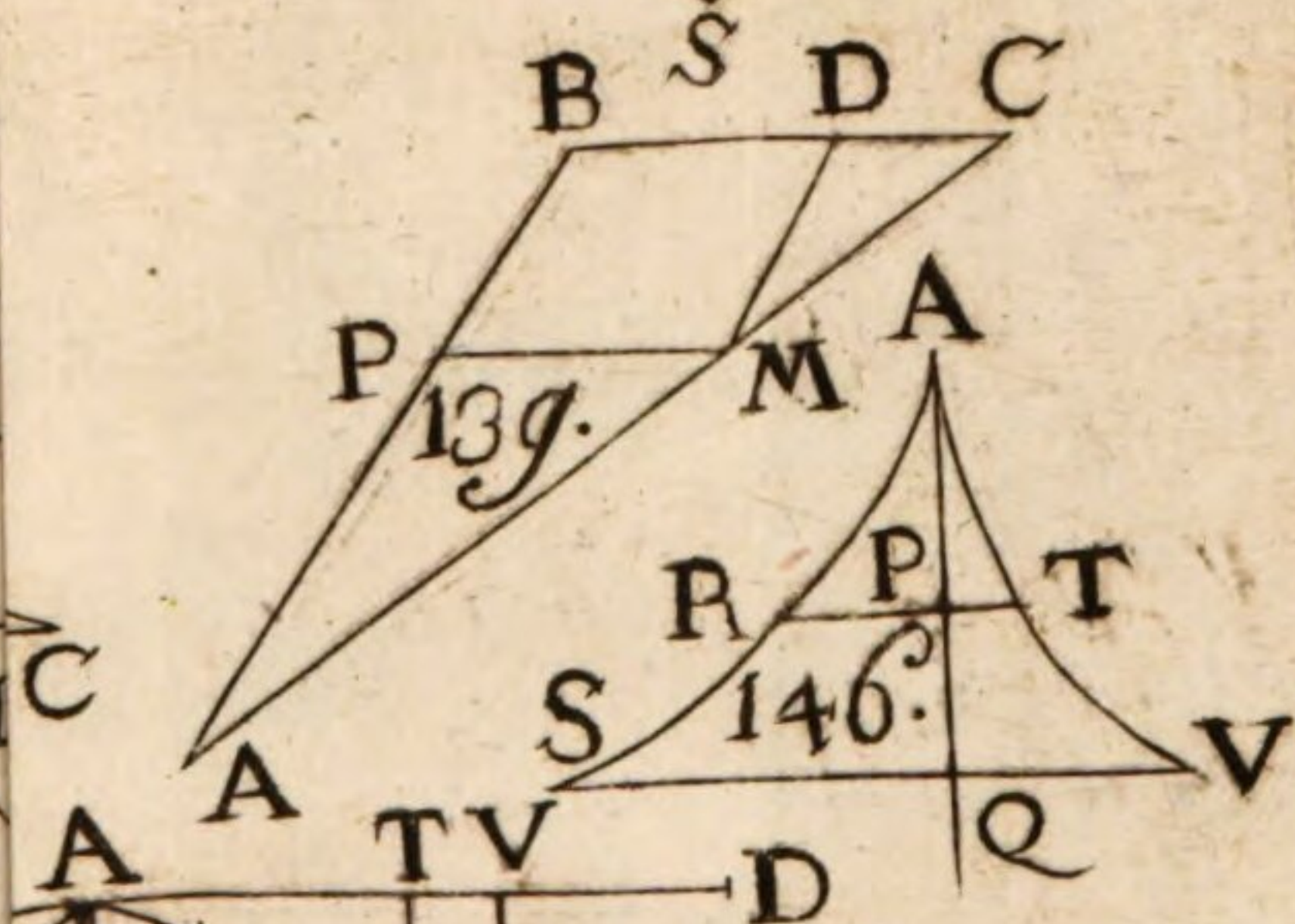
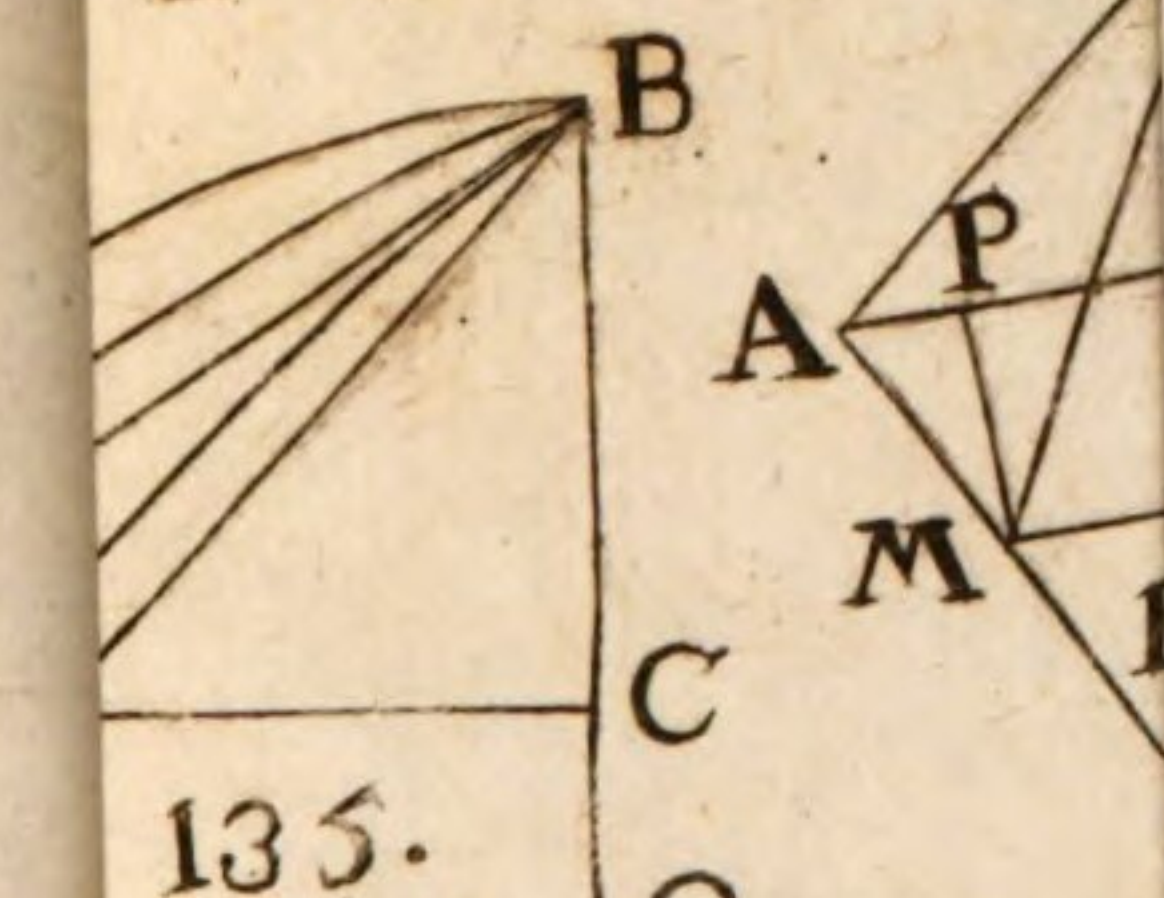
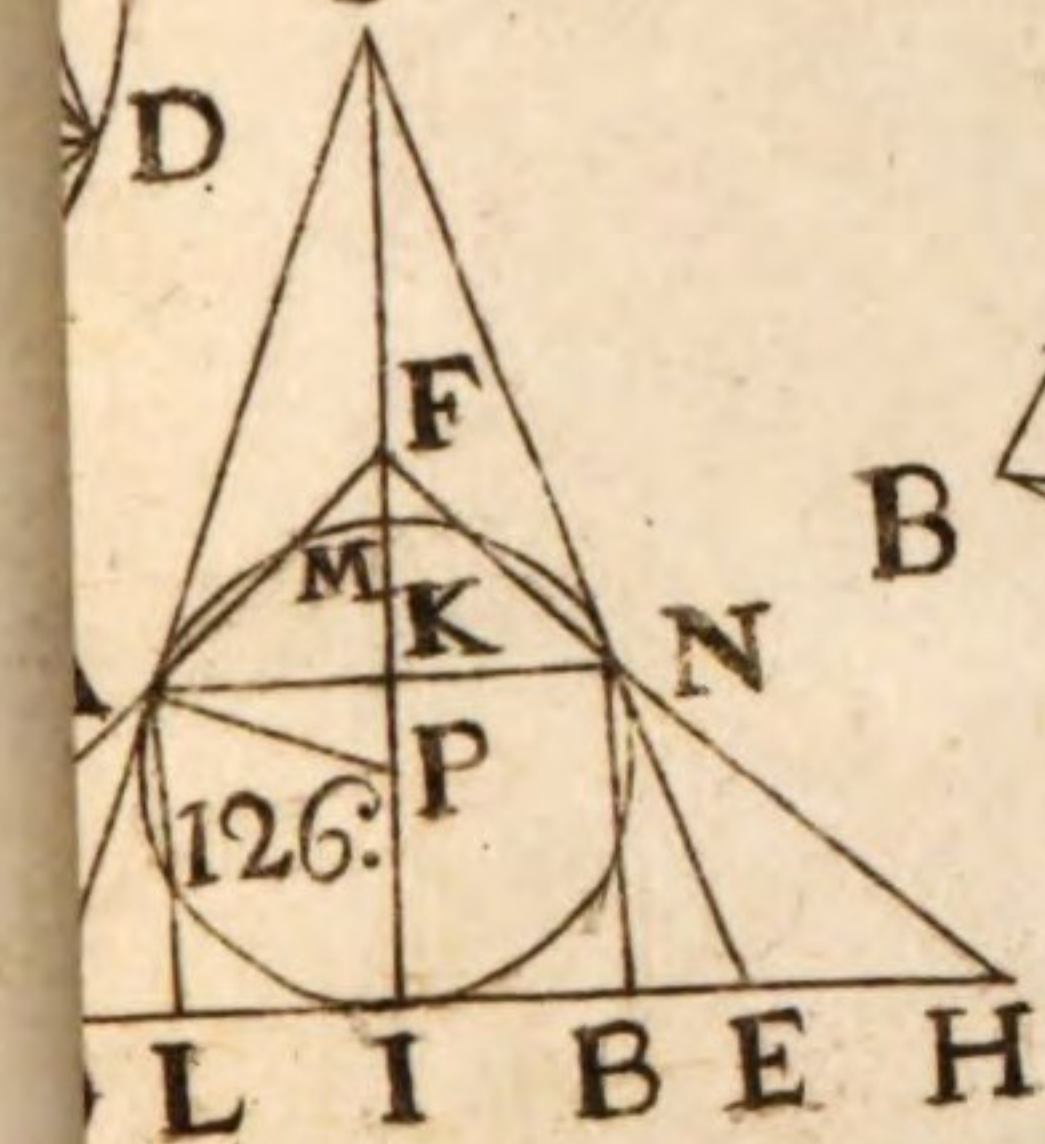
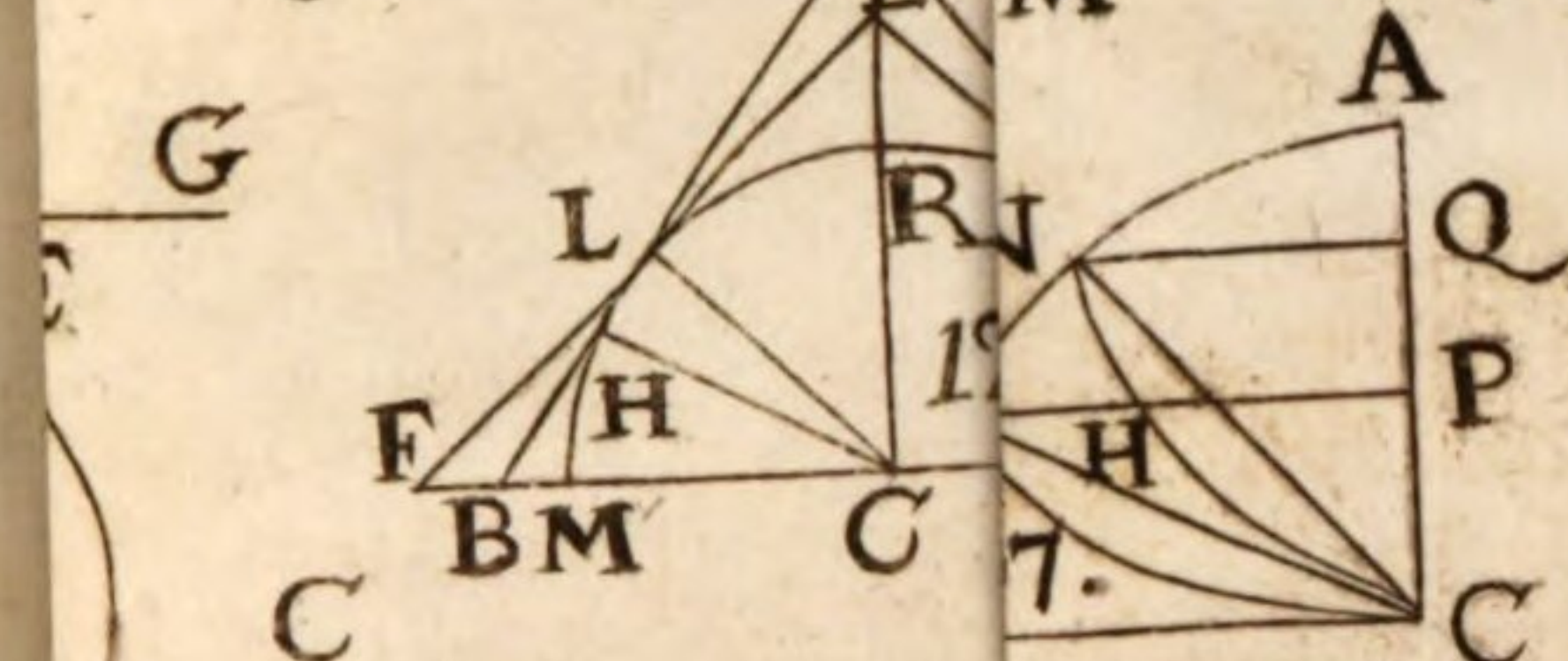
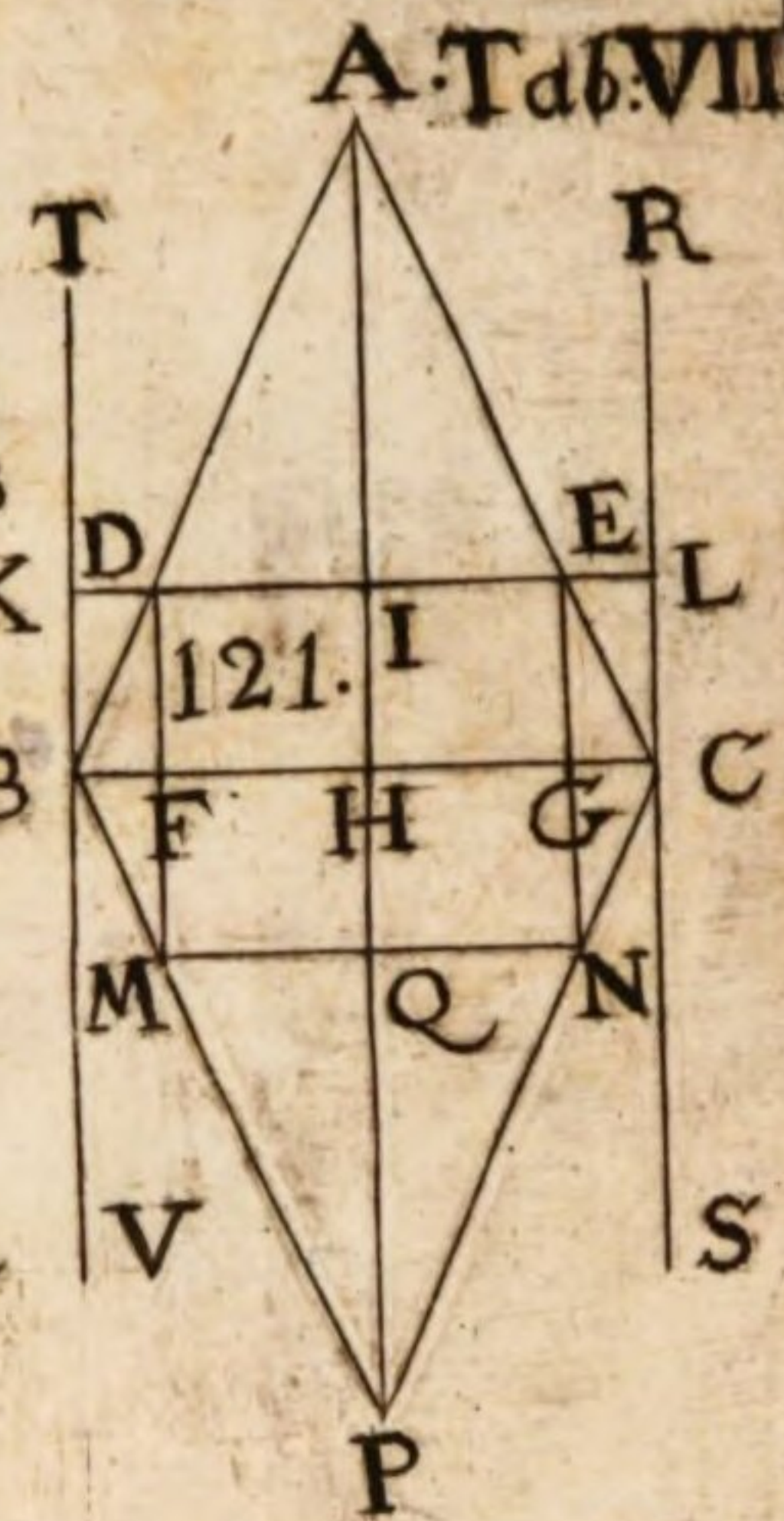
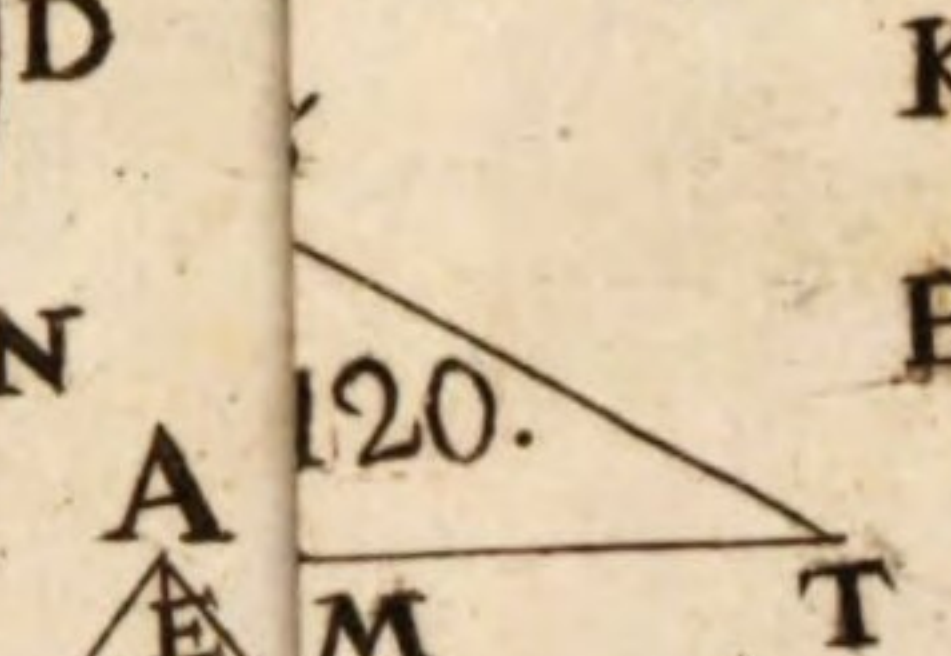
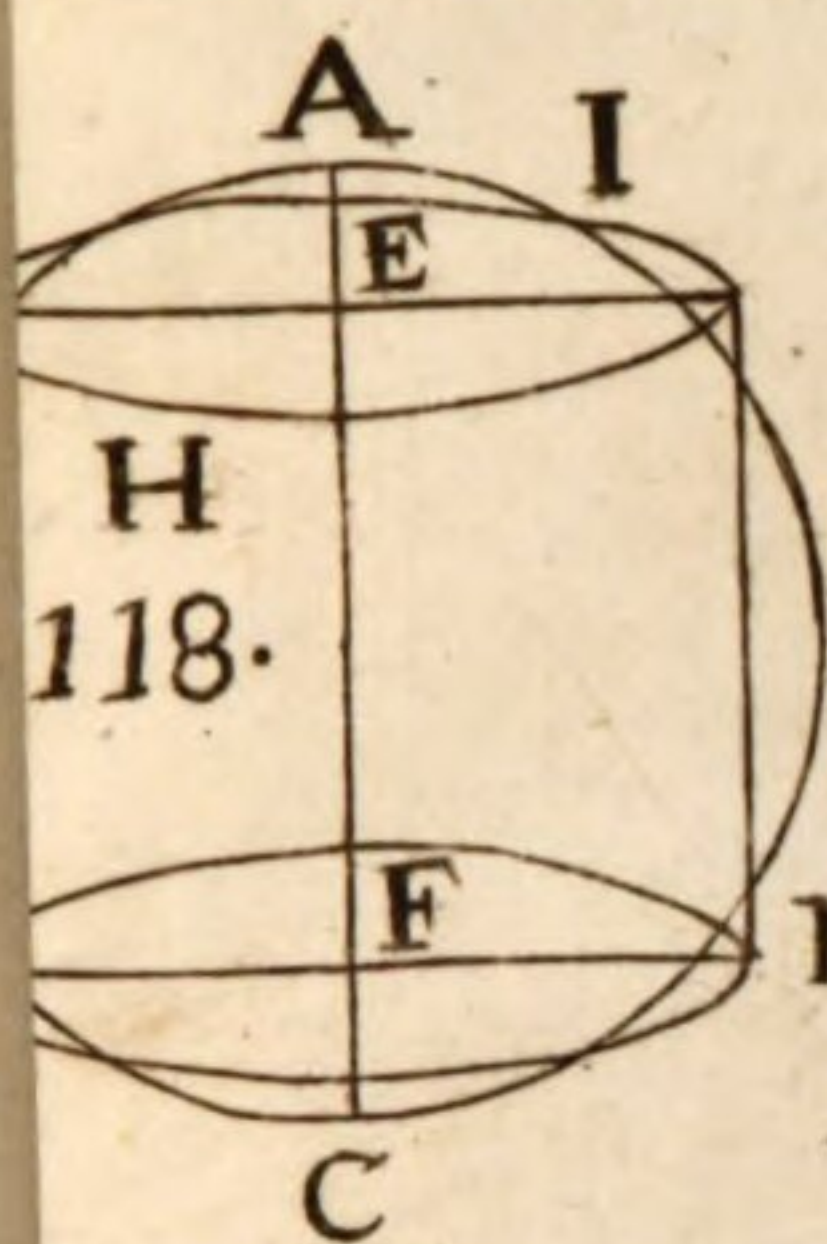


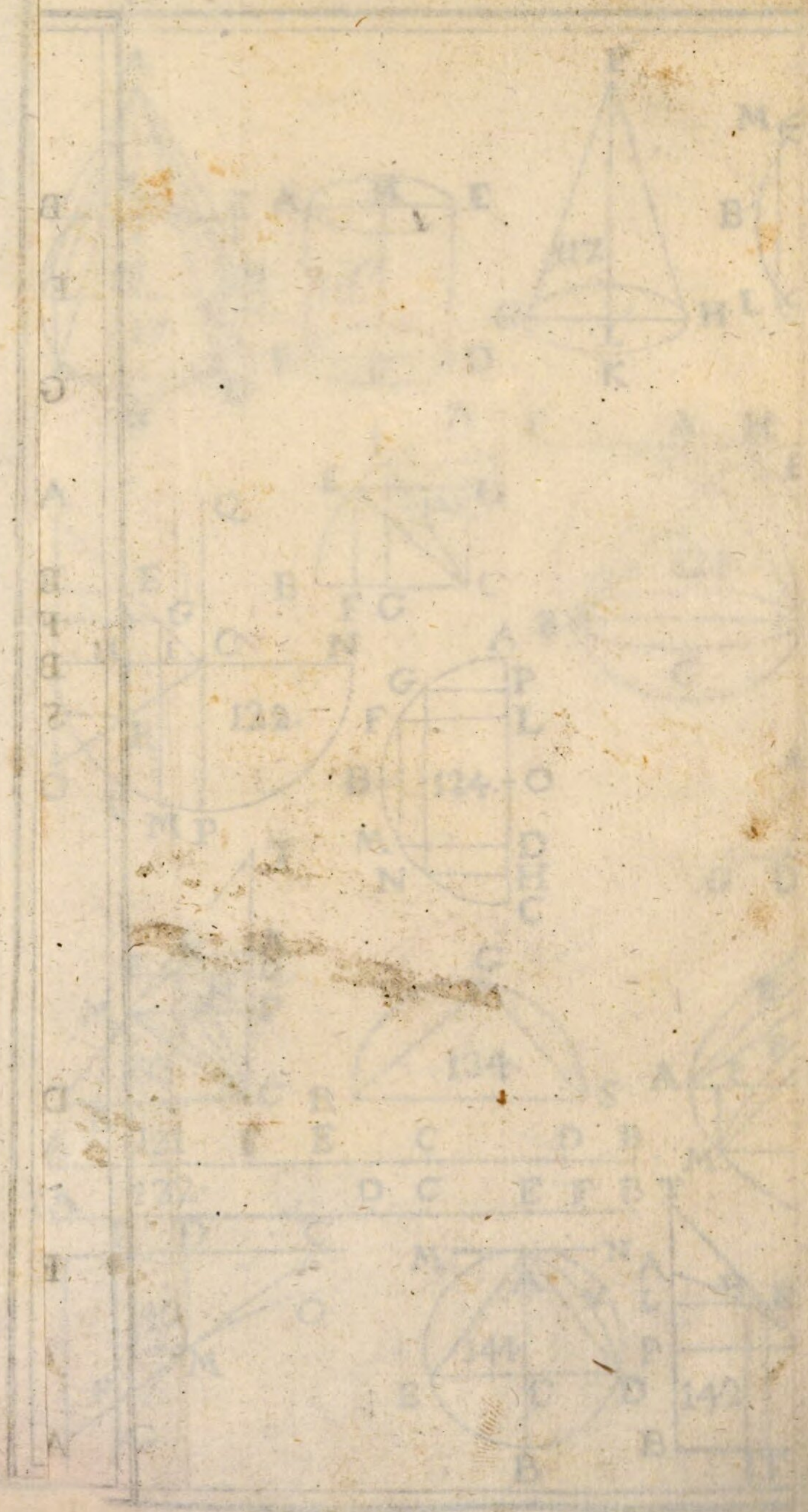


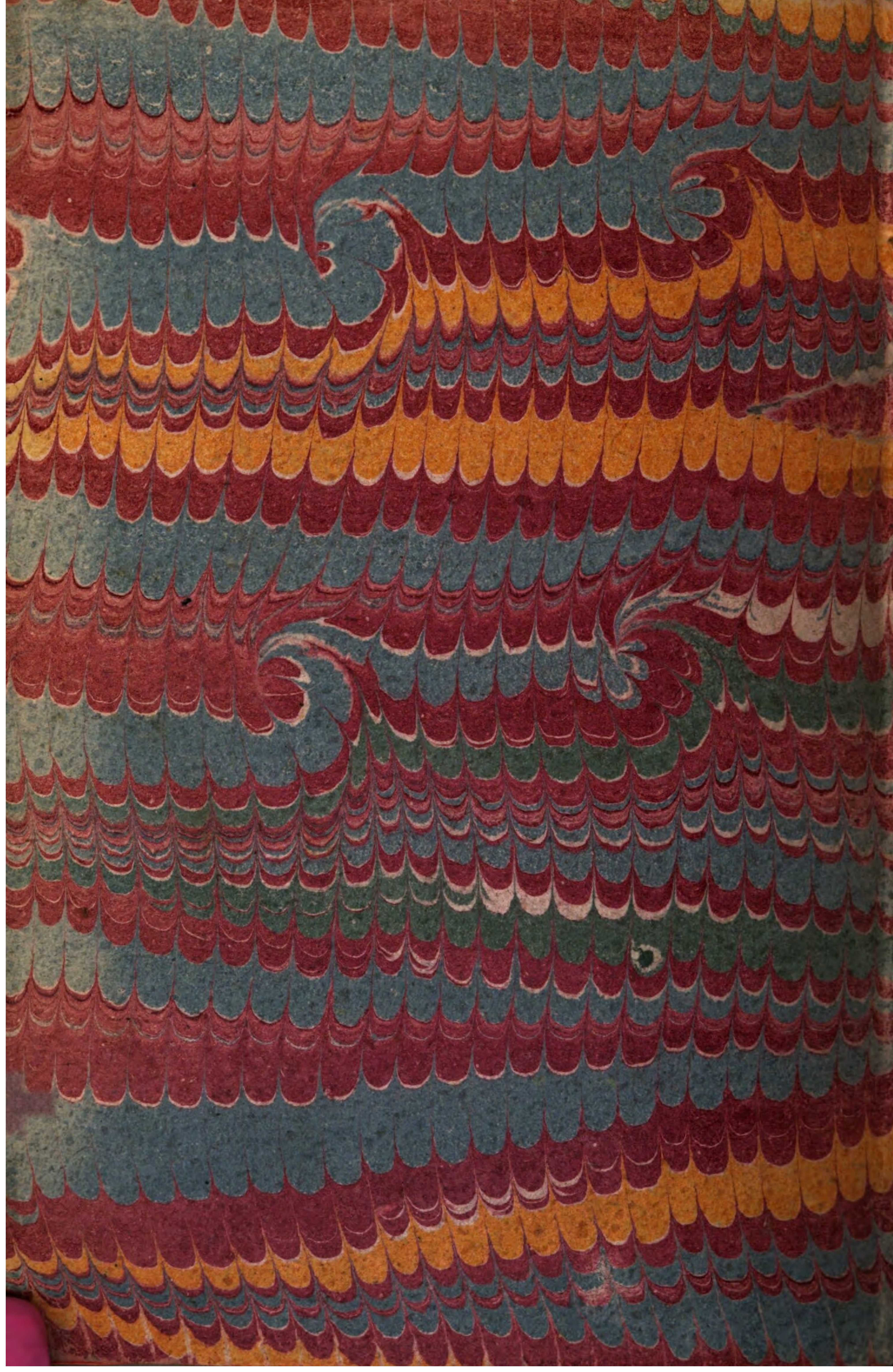
A. Tab. VII















Tommasini, Jacobus A.

De Maximis et Minimis ad Institutiones geometricas accommodatis specimen

Pisa 1774

Math.p. 582

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082964-4